Math. U. 215.

Math. u. 215-4

<36621095890012

<36621095890012

Bayer. Staatsbibliothek

Mathesis pag. 112.

Der
Anfangs-Gründe
aller
Mathematischen Wissenschaften
Letzter Theil,
Welcher so wohl die gemeine
Algebra, als die Differential- und Integral-Rechnung,
und einen Anhang
von den vornehmsten
Mathematischen Schriften
in sich begreiffet,
und
zu mehrerem Aufnehmen der Mathematik
so wohl auf hohen, als niedrigen Schulen
aufgesetzet worden
von

Christian Freyherrn von Wolff,
Seiner Königl. Majestät in Preussen Geheimen Rathe und Cantzler der Universität Halle, wie auch Professore Juris Naturæ & Gentium ac Matheseos daselbst, Professore honorario zu St. Petersburg, der Königl. Academie der Wissenschaften zu Paris, wie auch der Königl. Groß-Britannischen und der Königl. Preußl. Societät der Wissenschaften Mitgliede.

Neue, verbesserte und vermehrte Auflage.

Halle im Magdeburgischen,
Zu finden in der Rengerischen Buchhandlung.
1775.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Geneigter Leser:

Die Algebra kan niemahls zuviel gerühmet werden: denn sie ist eine Kunst, durch welche man mathematische Wahrheiten von sich selbst erfinden kan. Wenn ihr demnach die Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschaften, die ich in den drey vorhergehenden Theilen erkläret habe, euch bekannt machet, und die Algebra dabey studiret; so werdet ihr aus jenen durch diese vor euch selbst finden können, was ihr sonst aus Büchern oder von andern zu lernen von nöthen hättet. Ja ihr werdet auch vieles erfinden können, was andere vor euch noch nicht gedacht haben. Mit einem Worte sie machet euch geschickt, daß, wenn ihr nur gantz was geringes aus den mathematischen Wissenschaften gelernet, ihr von euch selbst ein mehreres erfinden könnet zu der Zeit, wenn ihr es von nöthen habet. Es ist aber keine vollkommenere Art zu studiren, als wenn man nur ein weniges lernen darf, und sich dabey doch auf alle vorkommende Fälle geschickt ma-

chet.

chet. Ich sage aber noch mehr. Ihr treffet in der Algebra die allervollkommenste Manier zu raisonniren an. Denn sie stellet die Begriffe der Sachen durch Zeichen vor, und verwandelt die Schlüsse, welche mit vielem Bedacht aus ihnen hergeleitet werden, in eine leichte Manier die Zeichen mit einander zu verknüpfen, und von einander zu trennen. Dadurch erhält man öfters in einer Zeile mehr, als in grossen Büchern nicht Raum finden würde. Durch das Anschauen weniger Zeichen werdet ihr öfters verständiger, als ihr durch vieler Jahre Arbeit nach der gemeinen Art zu lernen und zu dencken nicht werden könnet. In dieser Absicht pfleget man die Algebra den Gipfel menschlicher Wissenschaften zu nennen, und dieses von Rechtswegen. Ich habe demnach so wohl die gemeine Algebra, als die unvergleichliche Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz dergestalt erklären wollen, daß nicht allein ihre Kunstgriffe unvermerckt beygebracht, sondern auch die Hauptlehren von der so genannten Mathesi pura zugleich mit erlernet, ja von selbsten gefunden werden.

An-

Anfangs-Gründe
sowohl der gemeinen
Algebra,
als der
Differential-
und
Integral-Rechnung.

Anfangs-Gründe der Algebra.

Der erste Theil von den Anfangs-Gründen der gemeinen Algebra.

Die 1. Erklärung.

1.

Die gemeine Algebra ist eine Wissenschaft aus einigen gegebenen endlichen Grössen, andere ihres gleichen, von denen in Ansehung der gegebenen etwas bekannt gemacht wird, vermittelst gewisser Gleichungen zu finden.

Die 1. Anmerckung.

2. Z. E. Ihr sollet zwey Zahlen finden, die mit einander multipliciret eine gegebene Zahl 60, hingegen zusammen addiret eine andere gegebene Zahl 16 bringen. Also werden euch gegeben zwey Zahlen, und ihr sollt aus denselben zwey andere Zahlen finden, von welchen euch bekannt gemacht wird, daß ihre Summe der kleinern, ihr Product aber der grössern von den gegebenen Zahlen gleich seyn soll. Die Algebra nun lehret euch nicht allein in gegenwärtigem Falle die verlangten Zahlen, sondern auch eine allgemeine Regel finden, nach welcher ihr alle Exempel von dieser Art rechnen könnet.

Zusatz.

Zusatz.

3. Also ist die Algebra eine allgemeine Rechenkunst, dadurch man nemlich alles, was sich rechnen läst, ausrechnen kan (§. 1. *Arithm.*).

Die 2. Anmerckung.

4. Daher nennet auch der grosse Mathematicus in Engelland, Herr Isaac *Newton*, seine Anweisung zur Algebra Arithmeticam Universalem, und wir können die Algebra in unserer deutschen Sprache mit gutem Fuge eine Allrechenkunst heissen, zumahlen, wenn man die Buchstaben-Rechenkunst mit dazu nimmt.

Die 2. Erklärung.

5. Die Buchstaben-Rechenkunst wird diejenige genennet, welche an statt der Ziffern allgemeine Zeichen der Grössen brauchet, und damit die gewöhnlichen Rechnungsarten verrichtet.

Die 3. Erklärung.

6. Eine Grösse nennen wir alles dasjenige, was sich vermehren und vermindern läst, in so weit es sich vermehren und vermindern läst.

Der 1. Zusatz.

7. Also bestehet das Wesen einer Grösse in der Verhältniß zu einer andern ihres gleichen (§. 65. *Arithm.*).

Die 1. Anmerckung.

8. Z. E. Die Wärme nenne ich in so weit eine Grösse, als ich dencken kan, wie vielmahl eine gegebene Wärme, als die Wärme der Luft des heutigen Tages

in

in einer andern gegebenen Wärme, als in der Wärme der Luft des gestrigen Tages enthalten sey.

Der 2. Zusatz.

9. Und folgends sind die Grössen undeterminirte Zahlen, da man nemlich noch kein gewisses Eins setzet (§. 5. 8. *Arithm.*).

Die 2. Anmerckung.

10. Nehmet z. E. eine gerade Linie von einer determinirten Länge. Setzet die Linie sey eingetheilet in 4 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zur Eins machet, und die Länge der gantzen Linie mit ihm vergleichet: so heisset die Linie 4, und ihr betrachtet die Länge als eine Zahl. Setzet abermahls die Linie sey eingetheilet in 5 gleiche Theile. Wenn ihr einen davon zur Eins machet, und die Länge der gantzen Linie mit ihr vergleichet: so heisset die Linie 5, und ihr betrachtet ihre Länge abermahls als eine Zahl. Wiederum setzet die Linie sey eingetheilet in 13 gleiche Theile, und vergleichet ihre gantze Länge mit einem solchen Theile; so heisset sie 13, und ihr betrachtet dieselbe als eine Zahl. Hieraus sehet ihr, daß die Länge einer Linie durch unzählig viel Zahlen, grosse und kleine ausgesprochen werden kan, nachdem ihr nemlich einen kleinen oder grossen Theil derselben zur Eins annehmet. Wenn ihr nun keinen gewissen Theil setzet, mit welchem sie verglichen werden soll; sondern sie nur überhaupt betrachtet, in so weit sie mit einer gewissen Eins kan verglichen werden: so stellet ihr euch dieselbe als eine Grösse vor. Und daher kommt es, daß durch die Buchstaben-Rechenkunst sehr allgemeine Wahrheiten erfunden werden: Da hingegen die Rechenkunst nur eintzele Exempel ausrechnet, und also stets mit eintzelen Fällen zu thun hat.

Der 3. Zusatz.

11. Alles, was wir in der Welt antreffen und in uns selbst finden, hat in allem dem, was

es

es würcklich ist, und wovon sich etwas gedencken läst, seine Schrancken, und läst sich dannenhero mit anderen Dingen von seiner Art vergleichen, und darum als etwas, so vermehret oder vermindert werden kan, das ist, als eine Grösse (§. 6. 7.) betrachten. Derowegen erstrecket sich die Buchstaben-Rechenkunst und Algebra auf alle endliche Dinge, und führet uns auf einen deutlichen Begriff, von ihrer Endlichkeit.

Die 3. Anmerckung.

12. Es kan keine vollkommenere Erkäntniß gedacht, noch verlanget werden, als wenn man von der Endlichkeit der Dinge einen deutlichen Begriff erlanget: welches ich bey anderer Gelegenheit klar und deutlich ausführen will. Daher dienet die Algebra zu einer vollkommenen Erkäntniß der Dinge zu gelangen, und ohne sie würde es in den meisten Fällen unmöglich seyn, selbige zu überkommen.

Der 4. Zusatz.

13. Weil die Grössen undeterminirte Zahlen sind (§. 9.), so kan man auch keine andere Veränderungen, als wie mit Zahlen, mit ihnen vornehmen, und daher sie entweder zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, oder durch einander multipliciren, oder durch einander dividiren (§. 13. 15. 18. 21. 24. *Arithm.*).

Die 4. Anmerckung.

14. Gleichwie ihr aber mit Zahlen keine Rechnung vornehmen könnet, ihr müsset euch vorher dieselben durch gewisse Zeichen vorstellen: eben so wird in der Algebra erfordert, daß ihr für die Grössen gewisse Zeichen ersinnet.

Der

Der 1. willkührliche Satz.

15. Man benenne die gegebene Grössen jederzeit mit den ersten Buchstaben des Alphabets, *a*, *b*, *c*, *d*, u. s. w. die unbekannten aber, welche man suchet, mit den letzten *x*, *y*, *z*.

Die 1. Anmerckung.

16. Wie sich die Grössen dem Verstande zu erkennen geben, so müssen sie auch durch die Zeichen von einander unterschieden werden. Nun stellen sie sich in den algebraischen Aufgaben jederzeit dem Verstande vor, entweder als gegebene, das ist, bekannt gemachte, oder als gesuchte, das ist, noch unbekannte Grössen: Derowegen muß man auch durch die Zeichen unserer Einbildungskraft diesen Unterschied klärlich vorstellen. Denn sonst wäre Gefahr, daß man das Unbekannte mit dem Bekannten leicht verwirrete, und daher in Irrthum verfiele.

Die 2. Anmerckung.

17. Es wäre bey der Benennung der Grössen noch gar viel zu erinnern. Denn wenn sie geschickt und zum Erfinden dienlich seyn soll, müssen die Zeichen alle gegebene rélationes der bedeuteten Dinge gegen einander andeuten. Z. E. Wenn eine von den unbekannten Grössen dreymahl so groß ist als die andere, und die kleinere heisset *x*; so nennet man die grössere lieber 3*x* als *y*. Allein ich würde den Anfängern nicht dienen, wenn ich sie mit vielen Regeln auf einmahl überhäufete. Und halte es dannenhero für rathsamer, daß ich es insküntige lieber durch Exempel lehre, und die Regeln nach und nach gleichsam unvermerckt und ohne Mühe beybringe.

Der 2. willkührliche Satz.

18. Das Zeichen der Addition ist +, der Subtraction aber —. Jenes wird

durch Mehr; dieses durch Weniger ausgesprochen.

Anmerckung.

19. Z. E. Die Summe zweyer Grössen a und b wird geschrieben a + b und ausgesprochen: a mehr b. Hingegen die Differentz zweyer Grössen wird geschrieben durch a — b und ausgesprochen: a weniger b. Als es bedeute a 7 Thaler, b 8 Groschen: so bedeutet a + b, 7 Thl. + 8 gl. das ist, 7 Thl. und 8 gl.; hingegen a — b, 7 Thl.; — 8 gl. das ist, 7 Thl. weniger 8 gl.

Der 3. willkührliche Satz.

20. Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen, sondern man setzet die Buchstaben, welche einander multipliciren, ohne einiges Zeichen, neben einander: oder man deutet sie durch ein Comma (,) oder einen Punct (.) an. Insgemein brauchet man dieses Zeichen ×.

Anmerckung.

21. Wenn a durch b multipliciret werden soll, so schreibet das Product ab, oder a, b oder a.b, oder a × b. Wir werden uns des letztern Zeichens niemahls bedienen, weil es leicht mit dem X vermenget wird. Doch haben wir es hiermit anführen sollen, weil es in allen Büchern häufig vorkommt. Am meisten werden wir kein Zeichen brauchen: das Comma und den Punct aber nur in gewissen Fällen aus besondern Ursachen, die sich zu seiner Zeit in den Exempeln zeigen werden.

Der 4. willkührliche Satz.

22. Wenn eine Grösse viele andere auf einmahl multipliciret, so schliesset man sie

sie in eine parenthesin () ein, und setzet jene ohne einiges Zeichen vor oder hinter die parenthesin: oder man setzet zwischen dieselben ein blosses Comma.

Anmerckung.

23. Das Product von a + b — c in d, schreibet entweder also (a + b — c)d, oder dergestalt d (a + b — c), oder auch folgender massen a + b — c, d. Insgemein schreibet man dieses Product also:

$\overline{a+b-c} \times d$, oder auch $d \times \overline{a+b-c}$.

Allein wir bleiben billig bey der Manier des Herrn von Leibnitz, welche mit grossem Vortheile in die Acta Eruditorum Lipsiensia eingeführet worden: denn man kan sich nicht so leicht verirren, wie bey dem gemeinen Zeichen, und machet auch den Buchdruckern nicht so viel unnöthige Mühe, erspart überdieses viel an dem Raume. Andere Vortheile wollen wir jetzt nicht gedencken, die sich im folgenden zeigen werden.

Der 5. willkührliche Satz.

24. Das Zeichen der Division sind zwey Puncte (:), oder man schreibet die Buchstaben, welche einander dividiren sollen, wie in der Rechenkunst einen Bruch.

Anmerckung.

25. Wenn *a* durch *b* dividiret werden soll, so schreibet man den Quotienten entweder *a* : *b*, oder $\frac{a}{b}$ und spricht es beyderseits aus *a* durch *b* dividiret.

Der 6. willkührliche Satz.

26. Wenn eine Grösse viel andere auf einmahl dividiret, oder viel andere eine

dividiren, so werden, wie in der Multiplication, die vielen in eine parenthesin ( ) eingeschlossen, oder man kan auch an deren statt ein Comma brauchen.

Anmerckung.

27. Wenn $a + b$ durch c dividiret werden soll, so schreibet den Quotienten entweder $(a + b) : c$, oder $a + b, : c$. Sollt ihr a durch $b + c$ dividiren, so ist der Quotient $a : (b + c)$ oder $a :, b + c$. Wiederum wenn ihr $a + b$ durch $c + d$ dividiret, so schreibet den Quotienten $(a + b) : (c + d)$ oder $a + b, :, c + d$. Nach der gemeinen Art schreibet ihr diese Quotienten $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$, oder auch $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$.

Die 1. Aufgabe.

28. Einerley Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen zusammen zu addiren.

Auflösung.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zählet sie wie in der Rechenkunst zusammen.
2. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehet von der grössern die kleinere ab, und setzet zu dem, was überbleibet, das Zeichen der grössern.

Exempel.

$$\begin{array}{r} a + 2b - 3c - 5d \\ 3a - 2b + 6c + 2d \\ \hline 4a \quad + 3c - 3d \end{array}$$

Beweiß.

Weil die Buchstaben undeterminirte Zahlen sind (§. 9. 15.); so könnet ihr einen jeden als Eins ansehen, und demnach die Grössen, welche durch einerley Buchstaben benennet werden, als Dinge von gleicher Art zusammen zählen (§. 8. *Arithm.*). Alle Grössen, welche mit dem Zeichen — bemercket werden, fehlen, und hingegen die das Zeichen + haben, sind vorhanden. Wenn ich derowegen von beyder Art addiren soll, so wird durch die letzteren der Mangel aufgehoben, und muß freylich die Addition in eine Subtraction verkehret werden. W. Z. E.

Die 1. Anmerckung.

29. Die Grössen, welche mit dem Zeichen — bemercket werden, hat man nicht anders als Schulden anzusehen, uud hingegen die andern mit dem Zeichen + als baares Geld. Und daher nennet man auch die ersten weniger als nichts, weil man erst so viel weg geben muß, als man schuldig ist, ehe man nichts hat.

Die 2. Anmerckung.

30. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher wird, so bildet euch ein a bedeute 1 thl. b 1 gl. c 1 pf.

$7a-9b+5c$	7 thl. — 9 gl. + 5 pf.
$3a+5b-9c$	3 thl. + 5 gl. — 9 pf.
$10a-4b-4c$	10 thl. — 4 gl. — 4 pf.

Die 2. Aufgabe.

31. Einerley Grössen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Wenn einerley Zeichen sind, und ihr sollt das kleinere von dem grössern abziehen, so verrichtet die Subtraction wie in Ziffern (§. 49. *Arithm.*).
2. Sollet ihr aber die grössere von der kleinern abziehen, so ziehet die kleinere von der grössern ab, und zu dem übrigen setzet das Zeichen —, wenn die Grössen + haben: hingegen + wenn sie — haben.
3. Wenn die Zeichen verschieden sind, so addiret die Grössen, die ihr von einander abziehen sollt, und zu der Summe setzet das Zeichen derjenigen Grösse, von welcher die Subtraction geschehen sollte.

Exempel.

8a — 5c + 9d	8 thl. — 5 gl. + 9 pf.
6a — 8c — 7d	6 thl. — 8 gl. — 7 pf.
2a + 3c + 16 d	2 thl. + 3 gl. + 16 pf.
9b + 15 c — 7d + 8e — f	
6b + 20 c — 9d — 9e + 7f	
3b — 5c + 2d + 17e — 8f	

Oder verwandelt die Zeichen in wiedrige von den Grössen, die ihr abziehen sollt, und addiret sie zu den andern (§. 28.).

Beweiß.

Weil ihr jeden Buchstaben als Eins ansehen könnt (§. 9. 15.); so könnet ihr auch wie in Zahlen die Subtraction verrichten. Allein, wenn ihr die grössere von der kleineren abziehet, und sie haben das Zeichen +, als 20c von 15c, so nehmet ihr 20c weg, müsset aber wieder von oben die 15c addiren, und dannenhero fehlen nur noch so viel c als der Unterschied zwischen 20 und 15 ist, nemlich 5. Hingegen wenn das Zeichen — ist, als wenn ihr — 9d von — 7d abziehen sollet; so müsset ihr — 9d addiren, weil ihr es zu viel abgezogen. Denn ihr soltet 20c — 9d wegnehmen: ihr habet aber 20c gantz weggenommen. Da nun oben 7d fehlen, so heben sich von den 9d, die ihr dazu addiret, 7 auf, und bleiben nur noch 2d übrig. Darum dörfet ihr in diesen Fällen nur allezeit die kleinere von der grösseren abziehen, und zu dem übrigen das widrige Zeichen setzen, nemlich — wenn ihr + habet, und + wenn — ist. Endlich wenn die Zeichen verschieden sind, und ihr sollt z. E. — 9e von + 8e abziehen; so wisset ihr aus dem vorhergehenden, daß die untern 9e addiret werden müssen, weil ihr zu viel in dem vorhergehenden abgezogen. Und demnach bekommt ihr + 17e. Hingegen wenn ihr z. E. + 7f von — f subtrahiren sollet; so fehlet euch schon ein f. Wenn ihr nun die 7f unten auch noch wegnehmen

sollet, so fehlen euch zusammen 8 ℔. Daher habet ihr in beyden Fällen nur nöthig die Grössen zu addiren, und zu der Summe das Zeichen zu setzen, welches die Grösse hat, davon die Subtraction geschiehet. W. Z. E.

Die 3. Aufgabe.

32. Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu multipliciren.

Auflösung.

Verrichtet die Multiplication, wie in Zahlen (§. 55. *Arithm.*), nur mercket: daß einerley Zeichen im Producte +, verschiedene aber — geben.

Exempel.

a	+	b	—	d	10	=	8	+	4	—	2
a	—	b	—	d	2	=	8	—	4	—	2
		— ad	—	bd	+	dd		— 16	— 8	+	4
		— ab	—	bb	+	bd		— 32	— 16	+	8
aa	+	ab	—	ad			64	+ 32	— 16		
aa	—	bb	—	2ad	+	dd	20	=	68	—	48

Beweiß.

Wenn ihr + durch + multipliciret, so ist klar, daß das Product auch + haben muß. Ingleichen ist nicht schwer zu begreiffen, daß in dem Producte das Zeichen — seyn muß, wenn ihr + durch — multipliciret, weil ihr einen Mangel oder eine Schuld etlichemahl nehmet. Allein wenn — durch — multipli-

tipliciret wird, scheinet es nicht gleich klar zu seyn, warum in dem Producte + ist. Merket demnach, daß, wenn ihr 3 — 2 durch — 2 multipliciren sollet, ihr den Defect — 2 so vielmahl nehmen sollet, als 3 — 2 Einheiten hat; das ist, 1 mahl. Da ihr nun anfangs 3 mit — 2 multipliciret, so nehmet ihr den Defect 3 mahl und demnach 2 mahl zuviel. Derowegen müsset ihr ihn noch zweymahl dazu wieder addiren. Und also giebt — 2 mit — 2 zum Producte + 4 W. Z. E.

Zusatz.

33. Wenn ihr — a mit + b multipliciret, so kommt — ab heraus. Derowegen wenn ihr — ab durch + b dividiret, muß — a heraus kommen. Dividiret ihr aber — ab durch — a, so muß + b heraus kommen. Demnach ist klar, daß auch in der Division die Regel gilt: **Einerley Zeichen geben im Quotienten +, verschiedene aber —.**

Die 4. Aufgabe.

34. **Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu dividiren.**

Auflösung.

Wenn eine gegebene Grösse durch die andere sich würcklich dividiren lässet; so verfahret wie in Zahlen (§. 59. *Arithm.*), nur daß ihr die Regel von Veränderungen der Zeichen wohl in acht nehmet (§. 33.).

Kan aber die Division nicht würcklich geschehen, so bleibet es bey dem, was oben (§. 24. & seqq.) gesagt worden.

Exempel.

$$
\begin{array}{rl}
 & aa-bb-2ad+dd \quad (a+b-d \\
a-b-d) & aa-ab-ad \\
\hline
 & +ab-bb-ad+dd \\
a-b-d) & +ab-bb-bd \\
\hline
 & +bd-ad+dd \\
a-b-d) & -ad+bd+dd \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Anmerckung.

35. Weil die Buchstaben nicht wie die Zahlen eine Bedeutung von der Stelle haben, in welcher sie stehen; so dörfet ihr euch hier an keine Ordnung binden, sondern möget den Quotienten suchen, in welchem Gliede ihr ihn findet: welches auch in dem Subtrahiren des Products aus dem Divisore in den Quotienten statt findet.

Die 4. Erklärung.

36. Wenn man eine Grösse durch sich selbst multipliciret, so heisset das Product, welches heraus kommt, die andere Potentz oder Dignität derselben Grösse. Multipliciret ihr die andere Dignität noch einmahl durch die erste, so kommt die dritte Potentz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr ferner die dritte durch die erste, so kommt die vierte Potentz

oder

oder Dignität heraus. Multipliciret ihr die vierte durch die erste, so kommt die fünfte Potentz oder Dignität heraus u. s. w. Die erste Stammgrösse, so die erste Dignität genennet wird, heisset auch die Wurtzel in Ansehung der andern, dritten, vierten, fünften ꝛc. Dignität.

Der 7. willkührliche Satz.

37. Den Grad der Potentz oder Dignität einer Grösse deutet durch eine kleine Zifer, oder, wenn er nicht determiniret ist, durch einen kleinen Buchstaben an, den ihr oben zur Rechten an denjenigen Buchstaben setzet, wodurch die Grösse benennet wird. Z. E. Die andere, dritte, vierte ꝛc. Dignität von x ist x^2, x^3, x^4, ꝛc. x^m. Die Zahlen aber werden die Exponenten der Dignitäten genennet.

Der 1. Zusatz.

38. Dannenhero wenn ihr eine Dignität durch eine andere von eben der Wurtzel multipliciren sollt, so dörfet ihr nur ihre Exponenten zusammen addiren.

Exempel.

$$\frac{x^3}{x^4} \quad \frac{y^m}{y^n} \quad \frac{x^m}{x^r} \quad \frac{x^n}{x^n}$$

$$x^7 \qquad y^{m+n} \qquad x^{m+r} \qquad x^{2n}$$

Der

Der 2. Zusatz.

39. Hingegen wenn ihr die Dignität einer Grösse durch eine andere Dignität derselben dividiren sollt; so dörfet ihr nur ihre Exponenten von einander subtrahiren.

Exempel.

$$\frac{x^7}{x^4} = x^3 \qquad \frac{x^7}{x^3} = x^4 \qquad \frac{y^{m+n}}{y^n} = y^m \qquad \frac{y^n}{y} = y^{n-1}$$

Der 3. Zusatz.

40. Endlich wenn ihr die Dignität einer Grösse zu einer andern Dignität erheben sollt, so dörfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der andern multipliciren. Z. E. Ihr sollt x^3 zu der vierten Dignität erheben; so multipliciret 3 durch 4, und nehmet x^{12} vor die gesuchte Dignität an. Oder überhaupt ist die Dignität n von $y^m = y^{mn}$.

Anmerckung.

41. Die Ursache ist leicht zu errathen. Denn ihr sollt den Exponenten (3) viermahl zu sich selbst addiren (§. 38.). Dieses aber geschiehet, wenn ihr ihn durch 4 multiplicirt (§. 23. *Arith.*).

Der 4. Zusatz.

42. Folgends wenn ihr aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurtzel ziehen sollt, das ist, diejenige Grösse finden, welche zu einer gewissen Dignität erhoben worden, (§. 90. 91. *Arithm.* & §. 36. *Algebr.*); so dörfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponen-

ten

ten der Wurtzel dividiren. Z. E. Die Wurtzel der vierten Dignität aus x^{12} ist x^3 die Wurtzel m aus x^n ist $x^{n:m}$.

Anmerckung.

43. Mercket wohl diese Art die Wurtzel zu zeichnen, denn ihr werdet inskünftige grossen Vortheil davon haben.

Der 8. willkührliche Satz.

44. Wenn ihr die Wurtzel aus einer Grösse ziehen sollt, dergleichen sie nicht hat, so setzet folgendes Wurtzelzeichen vor sie, und darüber den gehörigen Exponenten der Wurtzel: in der Quadratwurtzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen. Also schreibet ihr die Cubicwurtzel von x, $\sqrt[3]{x}$; hingegen die Wurtzel der fünften Dignität von x, schreibet ihr $\sqrt[5]{x}$.

Zusatz.

45. Weil $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$, $\sqrt[m]{x^2} = x^{2:3}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42.); so könnt ihr jederzeit eine Formul in die Stelle der andern setzen, nachdem ihr von dieser oder von jener einen Vortheil haben könnet.

Die 5. Erklärung.

46. Die Wurtzel dergleichen Grössen, daraus die verlangte Wurtzel nicht genau gezogen werden kan, werden Irrationalgrössen oder, wenn es Zahlen sind,

Irra-

Irrationalzahlen genennet. Dergleichen sind $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt{6}$.

Anmerckung.

47. Die Irrationalgrössen können entweder eine Benennung haben, als $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$, oder verschiedene, als $\sqrt[4]{3}$ und $\sqrt[5]{6}$.

Die 5. Aufgabe.

48. Irrationalgrössen von verschiedener Benennung zu einer Benennung zu bringen.

Auflösung.

Es seyn die gegebenen Irrationalgrössen $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$.

Weil der Unterschied der Benennung in dem Unterschiede der Exponenten $n:m$ und $r:s$ bestehet, hingegen man diese Brüche in andere gleichgültige verwandeln kan, die einerley Benennung haben (§. 81. *Arithm.*); so ist weiter nichts vonnöthen, als daß ihr die Exponenten unter einerley Benennung bringet, und die dadurch gefundene Brüche in die Stelle der Exponenten schreibet. So werdet ihr finden, daß $x^{n:m} + y^{r:s} = x^{ns:ms} + y^{mr:ms} = \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

Anmerckung.

49. Auf eben diese Art könnt ihr mit den Irrationalzahlen verfahren. Z. E. Ihr sollt $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt{3}$ unter

unter eine Benennung bringen. Weil $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ und $\sqrt[6]{3} = 3^{1:2}$, so findet ihr $5^{1:3} + 3^{1:2} = 5^{2:6} + 3^{3:6} =$ $\sqrt[6]{5^2} + \sqrt[6]{3^3} =$ (wenn ihr die Grössen unter dem Wurtzelzeichen würcklich zu ihrer Dignität erhebet) $\sqrt[6]{25} + \sqrt[6]{27}$.

Die 6. Aufgabe.

50. Irrationalgrössen auf eine schlechte Art auszudrucken.

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x^{m:m} = a^{n:m} x = x\sqrt[m]{a^n}$ (§. 42.); so

1. Dividiret die Grösse unter dem Wurtzelzeichen durch eine Dignität von dem Grade, der einerley Exponenten mit der Wurtzel hat, als durch einen Cubum, wenn die Irrationalgrösse eine Cubicwurtzel ist. Denn wenn dergleichen Division nicht angehet, so könnet ihr auch die Irrationalgrösse nicht schlechter ausdrucken.
2. Den Quotienten lasset unter dem Wurtzelzeichen.
3. Vor das Wurtzelzeichen aber setzet die Wurtzel der Dignität, dadurch ihr dividiret.

So ist geschehen, was man verlangete.

Exem-

Exempel.

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$. Ingleichen

$\sqrt{18} = \sqrt{2.9} = 3\sqrt{2}$. Wiederum

$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

Der 1. Zusatz.

51. Wenn ihr Irrationalgrössen von einerley Art solchergestalt reduciret, und es bleibet unter dem Wurtzelzeichen einerley Grösse stehen; so verhalten sie sich gegen einander wie die Rationalgrössen vor dem Wurtzelzeichen. Z. E. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$. Derowegen ist $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2:3$ (§. 75. *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

52. Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe finden, ob zwey Irrationalgrössen eine Verhältniß gegeneinander haben, die sich durch Rationalgrössen ausdrucken lässet, z. E. das $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2:3$ (§. 51.).

Der 3. Zusatz.

53. Weil ihr in solchergestalt reducirten Irrationalgrössen den Theil, welcher irrational bleibet, für den Namen der Einheit mit Recht haltet (§. 5. & seqq. *Arithm.*); so könnet ihr die Summe oder den Unterschied der Irrationalgrössen finden, die unter dem

dem Wurtzelzeichen einerley Grössen haben und von einerley Art sind, wenn ihr die Rationalgrössen vor dem Wurtzelzeichen zusammen addiret, oder von einander subtrahiret. So werdet ihr finden, daß $\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ und $\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Ingleichen $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3.8}+\sqrt[3]{3.27}=2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}$.

Der 4. Zusatz.

54. Wenn ihr die Grössen, die zum Theil rational, zum Theil irrational sind, gantz irrational machen sollet; so müsset ihr die Grösse vor dem Wurtzelzeichen zu der Dignität erheben, welche der Exponent über dem Wurtzelzeichen andeutet, und durch selbige die Grösse unter dem Wurtzelzeichen multipliciren. So werdet ihr finden, daß $5\sqrt{2}=\sqrt{2.25}=\sqrt{50}$ und $5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}$. $5^3=\sqrt[3]{3.125}=\sqrt[3]{375}$.

Die 1. Anmerckung.

55. Damit ihr erfahret, ob eine vorgegebene Zahl sich durch eine Dignität von einem gegebenen Grade dividiren lässet, oder nicht, so dörfet ihr sie nur in diejenigen Zahlen zergliedern, durch deren Multiplication sie entstehet. Dieses aber geschiehet, wenn ihr sie mit den eintzelen Zahlen zu dividiren anfanget. Z. E. Ihr sollet auf solche Weise 368 zergliedern, so findet ihr:

2	184
4	92
8	46
16	23

Die 2. Anmerckung.

56. Wem die Irrationalrechnungen anfangs verdrüßlich fallen, der kan sie so lange überschlagen, bis sie unten vorkommen. Er hüte sich aber mit Fleiß, daß er nicht für unnütze Grillen halte, wovon er den Nutzen nicht bald sehen kan. Ihr werdet im folgenden erfahren, daß ich niemahls eine Lehre vortrage, die nicht ihren gewissen Nutzen hat.

Die 7. Aufgabe.

57. Eine Irrationalgrösse durch eine andere von einerley Art zu multipliciren.

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$ und $\sqrt[m]{b^r} = b^{r:m}$ (§. 42.); so ist $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^r} = a^{n:m}\, b^{r:m}$ (§. 20.) $= \sqrt[m]{a^n\, b^r}$ (§. 45.) und erhellet hieraus folgende Regel:

1. Multipliciret die Grössen unter dem Wurtzelzeichen (a^n und b^r) durch einander.
2. Vor das Product setzet das Wurtzelzeichen mit seinem Exponenten ($\sqrt[m]{}$).

So

So werdet ihr finden, daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$,
und $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$.

Zusatz.

58. Wenn ihr also eine Irrationalzahl durch eine andere Irrationalzahl dividiren sollt, so dörfet ihr nur die Zahlen unter dem Wurtzelzeichen durch einander dividiren. So werdet ihr finden, daß $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7}$ und $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

Die 8. Aufgabe.

59. Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Auflösung.

1. Unterscheidet mit Fleiß die bekannten Grössen von den unbekannten, und benennet jene mit den ersten, diese, mit den letzten Buchstaben des Alphabets (§. 15.). Wenn die **Benennung** geschehen, so
2. Suchet eine **Gleichung**, daß ihr nemlich eine Sache mit zweyerley Nahmen beleget: denn so müssen die beyden Werthe einander gleich seyn (§. 27. *Arithm.*). Ihr müsset aber so viel Gleichungen finden, als ihr unbekannte Grössen habet. Wenn es nicht angehet, so ist es ein Zeichen, daß ihr die eine unbekannte Grösse so groß an-

nehmen könnet als ihr wollet. Und pfleget man dergleichen Aufgaben Undeterminirte Aufgaben zu nennen. Es sind aber die Gleichungen entweder in der Aufgabe selbst angedeutet, oder ihr müsset sie aus ihren Umständen durch Hülfe derjenigen Lehrsätze suchen, welche von der Gleichheit handeln.

3. Wenn in den Gleichungen bekannte und unbekannte Grössen mit einander vermenget sind, so müsset ihr sie dergestalt einrichten, daß auf einer Seite lauter bekannte, auf der andern aber nur eine unbekannte stehen bleibet: Welches geschiehet, wenn ihr die Grössen, welche subtrahiret sind, durch addiren; welche addiret sind, durch subtrahiren; welche andere multipliciren, durch dividiren; welche andere dividiren, durch multipliciren wegbringet, oder auch die Wurtzeln zu ihren Dignitäten erhebet, oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurtzeln ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet (§. 30. 31. 32. 33. *Arithm.* & §. 36. *Algebr.*).

Anmerckung.

60. Unerachtet die Einrichtung der gefundenen Gleichung sehr oft auf beschriebene Weise geschehen kan; so gehet es doch nicht in allen Fällen an. Wir wollen aber erst diese Regeln uns durch Exempel bekannt machen, ehe wir zu andern schreiten. Denn die Algebra lernet man nicht sowohl durch Regeln, als durch Exempel.

Die

Die 9. Aufgabe.

61. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und ihrem Unterschiede die Grössen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die kleine Grösse $= x$, der Unterschied $= b$, die grosse $= y$.

So ist,

$x + y = a$ (§. 15. *Arithm.*) $y - x = b$ (§. 18. *Arithm.*)

$x = x$ *subtr.* $x \quad x$ *add.*

$y = a - x$ $y = b + x$

Demnach

$a - x = b + x$ (§. 28. *Arithm.*)

$x \quad x$ *add.*

$a = b + 2x$

$b \quad b$ *subtr.*

$a - b = 2x$

div.

$$\frac{a - b = x}{2}$$

Folgends ist die grössere $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Regel.

Ziehet den Unterschied der beyden Grössen (b) von der Summe (a) ab. Den

Rest dividiret durch zwey; so ist der Quotient die kleine Grösse (x). Addiret den Unterschied zu der Summe; so ist die Helfte davon die grosse Grösse (y).

Z. E. Es sey $a = 30$, $b = 8$, so ist $(a - b) : 2 = (30 - 8) : 2 = 22 : 2 = 11$, und $(a + b) : 2 = (30 + 8) : 2 = 38 : 2 = 19$.

Probe.

Denn $19 - 11 = 8$ und $19 + 11 = 30$.

Oder allgemein:

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$
Summe a	Unterschied b

Anmerckung.

62 Ihr könnet jederzeit aus der letzten Gleichung eine Regel machen, dadurch die Aufgabe in allen vorkommenden Fällen aufgelöset werden kan, wenn ihr vor die Buchstaben die Nahmen der Sachen setzet, die sie bedeuten, und an statt der Zeichen die Rechnungsarten benennet, die sie andeuten: allein der Kürtze halber werde ich ins künftige keine Regel hersetzen, wenn es nicht besondere Umstände erfordern. Und dieses thue ich um so viel lieber, weil man die Exempel in Zahlen viel hurtiger auflösen kan, wenn man die Ziffern in die Stelle der Buchstaben setzet, als wenn man nach der Regel verfähret. Auch ist zu mercken, daß öfters in den Gleichungen, da noch bekanntes und unbekanntes mit einander vermenget ist, nützliche Lehrsätze enthalten sind. Z. E. Aus der Gleichung $a - b = 2x$ erhellet folgender Lehrsatz.

Wenn man von der Summe zweyer Grössen ihren Unterschied abziehet; so ist

ist der Rest zweymahl so groß als die kleinere.

Die 10. Aufgabe.

63. Eine Zahl zu finden deren Helfte $\frac{1}{2}$, und $\frac{1}{4}$ zusammen um 1 grösser sind als die Zahl selbst.

Auflösung.

Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so ist

$$x + 1 = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x$$
$$= 12x + 8x + 6x$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$24$$
$$= \tfrac{26}{24}x \text{ (§. 82. } \textit{Arithm.}\text{)}$$
$$= x + \tfrac{1}{12}x \text{ (§. 78. 80. } \textit{Arithm.}\text{)}.$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$1 = \tfrac{1}{12}x$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} 12 \textit{ mult.}$$
$$12 = x$$

Probe $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 3 + 4 = 13$.

Es ist demnach nicht mehr als die einige Zahl 12, welche diese Eigenschaft hat.

Die 11. Aufgabe.

64. Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die halbe Differentz $= x$
das Product $= b$;

so ist die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + x$
die kleine $\frac{1}{2}a - x$ } §. 61.

Und also $\frac{1}{4}aa - xx = b$ (§. 32.).

$xx \quad xx$ *add.*

$\frac{1}{4}aa = b + xx$

$b \quad b$ *subtr.*

$\frac{1}{4}aa - b = xx$

rad. extr.

$\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x$

Also ist die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$;
die kleine $\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

Es sey $a = 14, b = 48$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$, folgends ist die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$ und die kleine $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$.

Probe. Denn $8 + 6 = 14$ und $6 \cdot 8 = 48$.

Anmerckung.

65. Es ist an der Benennung öfters viel gelegen. Denn wenn ihr in gegenwärtiger Aufgabe die grosse Zahl x, die kleine y nennet: kommet ihr auf eine Gleichung, die ihr noch nicht aufzulösen vermögend seyd. Mercket dabey den Lehrsatz, den die Gleichung $\frac{1}{4}aa = b + xx$ an die Hand giebt:

Das Quadrat der halben Summe zweyer Grössen ist gleich dem Producte derselben in einander, und dem Quadrate des halben Unterschiedes.

Die 12. Aufgabe.

66. Es wird gegeben die Summe gleicher Dignitäten zweyer Grössen, und der Unter-

Unterschied selbiger Dignitäten, ihr sollet die Grössen selbst finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die kleine Grösse $= x$
der Unterschied $= b$ die grosse $= y$
so ist

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$
$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Folgends

$$a - x^m = b + x^m$$
$$a = b + 2x^m$$
$$a - b = 2x^m$$
$$(a - b) : 2 = x^m$$
$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Es sey $m = 2, a = 97, b = 65$; so ist $x = \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)} = \sqrt{(48\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$ und $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{81} = 9$.

Probe: Denn $81 + 16 = 97$ und $81 - 16 = 65$.

Die 13. Aufgabe.

67. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß das Product einer jeden in die Quadratwurzel der andern einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey das eine Product $= a$; die eine Zahl $= x$
das andere ——— $= b$; die andere $= y$

So ist $x\sqrt{y} = a$ $\qquad$ $y\sqrt{x} = b$

$x^2y = a^2$ $\qquad$ $y^2x = b^2$

$x = b^2 : y^2$

$x^2 = b^4 : y^4$

Wenn ihr den Werth von x^2 in die erste Gleichung zur Lincken $x^2y = a^2$ setzet, so bekommt ihr

$b^4y : y^4 = b^4 : y^3 = a^2$

——— ——— ——— y^3 *mult.*

$b^4 = a^2y^3$

$b^4 : a^2 = y^3$

$\sqrt[3]{(b^4 : a^2)} = y$

Es sey $a = 18$, $b = 12$, so ist $y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$
$= \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4$; und $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Probe: Denn $9.2 = 18$ und $4.3 = 12$.

Die 14. Aufgabe.

68. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Differentz ihrer Quadrate die beyden Grössen zu finden.

Auf-

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die halbe Differentz
die Differentz der Quadr. $= b$ der Grössen $= y$

So ist die eine Grösse $\frac{1}{2}a + y$ (§. 61.)
die andere $\frac{1}{2}a - y$
Das Quadrat der ersten $\frac{1}{4}aa + ay + yy$
Das Quadrat der andern $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Die Differentz $b = 2ay$

folgends $b : 2a = y$

Es sey $b = 40$, $a = 10$; so ist $y = 40 : 20 = 2$,
folgends die eine Zahl $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$;
die andere $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Probe: Denn $7 + 3 = 10$ und $49 - 9 = 40$.

Die 15. Aufgabe.

69. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Summe ihrer Quadrate die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$; die eine Grösse $\frac{1}{2}a + y$ (§. 61.).
Die andere $= b$; die andere $\frac{1}{2}a - y$
So ist das Quadrat der ersten $\frac{1}{4}aa + ay + yy$
der andern $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Die Summe $b = \frac{1}{2}aa + 2yy$

Folgends $\frac{b - \frac{1}{2}aa = 2yy}{\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa = yy}$

$\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = y$

Es sey $a = 10$, $b = 58$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$ folgends $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ und $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Probe: Denn $7 + 3 = 10$ und $49 + 9 = 58$.

Die 16. Aufgabe.

70. Zwey Zahlen zu finden, deren Product einer gegebenen Zahl gleich ist, das Quadrat aber der Summe zu dem Quadrate der Differenz beyder Zahlen eine gegebene Verhältniß hat.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die Summe $= 2x$ die gegebene Verhältniß $= b:c$ der Unterschied $= 2y$

so ist die eine Zahl $x + y$

die andere $x - y$

und also

$xx - yy = a$; $b:c = 4x^2 : 4y^2 = x^2 : y^2$ (§. 75. *Arithm.*).

$xx = a + y^2$; $by^2 = cx^2$ (§. 109. *Arithm.*)

$by^2 : c = x^2$

Fol-

Folgends

$$\frac{a+y^2=by^2:c}{ac+cy^2=by^2}$$

$$\frac{ac=by^2-cy^2}{ac:(b-c)=y^2}\ b-c \text{ div.}$$

$$\sqrt{ac}:\sqrt{(b-c)}=y$$

Es sey $a=96$, $b:c=25:1$, so ist $y=\sqrt{96}$: $\sqrt{(25-1)}=\sqrt{4}$ (§. 58) $=2$; und $x=\sqrt{(a+y^2)}$ $=\sqrt{(96+4)}=\sqrt{100}=10$: folgends $x+y$ $=10+2=10$ und $x-y=10-2=8$.

Probe: $12.8=96$ und $25:1=400:16$.

Die 17. Aufgabe.

71. Aus der gegebenen Tagereise zweyer Bothen und der Zeit, da der andere dem ersten nachgehet, die Zeit zu finden, in welcher er ihn einholet.

Auflösung.

Es sey die Tagereise des ersten $=a$; die gesuchte Zeit $=x$

des andern $=b$

die gegebene Zeit $=c$

So ist die Reise des ersten in der gegebenen Zeit $=ac$, in der gesuchten $=ax$. Die Reise des andern in der letztern Zeit $=bx$. Da nun beyde einen gleichen Weg zurück geleget; so ist

$ac + ax = bx$

$ax \quad ax$ subtr.

$ac = bx - ax = (b - a)x$

$b - a$ div.

$ac : (b - a) = x$

Es sey $a = 6$, $b = 8$; $c = 4$; so ist $x = 24$: $(8 - 6) = \frac{24}{2} = 12$.

Probe: Denn $12.8 = 96$ und $4.6 + 12$. $6 = 24 + 72 = 96$.

Anmerckung.

72. Weil man in Auflösung dieser Aufgabe weder auf den Begriff der Tagereise, noch der Bothen siehet; so ist daraus abzunehmen, daß sie bey der Bewegung aller Cörper kan angebracht werden.

Die 18. Aufgabe.

73. Aus der gegebenen Tagereise eines Bothens und der Zeit da er hinweg ist, die Tagereise eines andern Bothens zu bestimmen, der ihn in einer gegebenen Zeit einholen soll.

Auflösung.

Es sey die Tagereise des ersten $= a$ des anderen $= x$

die verflossene Zeit $= b$

die gegebene Zeit $= c$

so findet man wie in der vorhergehenden Aufgabe

$ab + ac = cx$

$ab + a = x$

c.

Es sey $a=6$, $b=4$, $c=12$; so ist $x=\frac{24}{12}+6=2+6=8$.

Probe: Denn $24+72=96$ und $8.12=96$.

Die 19. Aufgabe.

74. Aus der gegebenen Weite zweyer Oerter von einander, aus welchen zu gleicher Zeit zwey Bothen ausreisen, und der Tagereise eines jeden, die Zeit zu bestimmen, da sie einander begegnen.

Auflösung.

Es sey die Weite $=a$ die gesuchte Zeit $=x$
die Tagereise des ersten $=b$
des andern $=c$

So ist der Weg des ersten in der zu bestimmenden Zeit $=bx$, des andern $=cx$; folgends, weil beyde zusammen die gantze Weite der Oerter von einander durchreiset,

$$bx+cx=a$$

das ist $(b+c)x=a$

$$x=a:(b+c)$$

Es sey $a=120$, $b=6$, $c=4$; so ist $x=120:(6+4)=120:10=12$. Sie begegnen also einander in dem zwölften Tage.

Probe: Denn $6.12+4.12=72+48=120$.

Die 20. Aufgabe.

75. Aus dem gegebenen Werthe einer Kanne guten Weines zu bestimmen, wie viel man Wasser darunter mischen muß, damit man das Maaß um einen verlangten geringern Preiß geben kan.

Auf-

Auflösung.

Der höhere Preiß sey $= a$ das Wasser $= x$
der geringere $= b$
das Kannen-Maaß $= 1$

Da nun der Preiß von $1 = b$, so ist der Preiß von $1 + x = b + bx$ (§. 113. *Arithm.*) und daher, weil das Wasser x nichts gilt,

$b + bx = a$ (§. 28. *Arithm.*)

$bx = a - b$

$x = (a - b) : b$

Es sey $a = 16$, $b = 10$; so ist $x = (16 - 10) : 10 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Probe: Denn wenn $1\frac{3}{5}$ Kannen 16 Groschen kommen; so kommt eine Kanne 10 Groschen (§. 113. *Arithm.*).

Die 21. Aufgabe.

76. Aus dem gegebenen Preisse zweyer Weine von verschiedener Güte zu bestimmen, wie viel man von dem geringern zu dem bessern giessen muß, damit man ihn vor einen verlangten Preiß geben kan.

Auflösung.

Es sey der Preiß des guten $= a$	die Grösse des schlechten $= x$
des schlechten $= b$,	so ist sein Preiß $= bx$
des vermischten, $= c$	die Grösse des guten $= 1 - x$.
das Kannenmaaß, $= 1$	sein Preiß $= a - ax$,

Fol-

Folgends.

$a - ax + bx = c$ (§. 28. *Arithm.*).

$ax \quad ax$

$a + bx = ax + c$

$bx \quad bx$

$a = ax - bx + c$

$c \quad c$

$a - c = ax - bx = (a - b)x$

$a - b$ *div.*

$(a - c) : (a - b) = x$

Es sey $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; so ist $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$. Demnach werden von dem schlechten $\frac{2}{3}$ und von dem guten $\frac{1}{3}$ genommen.

Probe: Denn $\frac{1}{3}$ vom guten kommt $5\frac{1}{3}$ Gr. und $\frac{2}{3}$ vom schlechten $6\frac{2}{3}$ Gr. folgends der vermischte 12 Gr.

Anmerckung.

77. Die auf besondere Arten der Fälle gerichtete Aufgaben sind schwerer aufzulösen, als die allgemeineren von Zahlen und Grössen: Denn man hat hier viel besondere Umstände, welche zur Auflösung der Aufgabe nichts beytragen, und es ist öfters, sonderlich für Anfänger nicht eine geringe Mühe, wenn man die Aufgaben von den besondern und zur Auflösung nicht dienenden Umständen befreyen soll.

Die 6. Erklärung.

78. Wenn die Wurzel einer Dignität oder Potentz aus zwey Theilen bestehet,

nennet man sie eine binomische Wurtzel, als $a+b$. Bestehet sie aus drey Theilen, als $a+b+c$; so heisset sie eine trinomische Wurtzel: wenn sie aus vier Theilen bestehet, eine quadrinomische Wurtzel u. s. w. überhaupt aber nennet man sie eine polynomische Wurtzel, wenn sie aus mehr als zwey Theilen bestehet.

Die 22. Aufgabe.

79. Die Natur des Quadrates oder der andern Dignität einer binomischen Wurtzel zu finden.

Auflösung.

Ihr verlanget zu wissen, wie das Quadrat einer binomischen Wurtzel entstehen kan (§. 4. *Method. Mathem.*). Multipliciret demnach die binomische Wurtzel $a+b$ durch sich selbst, so wird das Product zeigen, aus was für Theilen das Quadrat zusammen gesetzet wird, und wie diese Theile des Quadrates aus den Theilen der Wurtzel entstehen.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +ab+b^2 \\ a^2+ab \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Quadrat der binomischen Wurtzel.

Lehr-

Lehrsatz.

Das Quadrat der binomischen Wurzel begreifet in sich: die Quadrate der beyden Theile (a^2 und b^2), und ein Product ($2ab$) aus dem einen Theile zweymahl genommen ($2a$) in den andern (b).

Anmerckung.

80. Ihr habt hier auf eine sehr leichte Art den andern Lehrsatz der Rechenkunst (§. 93. *Arithm.*) gefunden, daraus wir die Ausziehung der Quadratwurtzel (§. 97. *Arithm.*) hergeleitet. Wenn ihr aber dieselben Regeln vergessen hättet, könte euch dieses allgemeine Exempel $a^2 + 2ab + b^2$ an statt derselben dienen. Denn ihr sehet, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken das darinnen befindliche Quadrat a^2 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurtzel a habet. Wollet ihr nun den andern finden, so müsset ihr mit $2a$, das ist, mit dem gefundenen Quotienten zweymahl genommen, die folgende Zahl $2ab$ dividiren, und hernach nicht allein das Product aus dem Divisor $2a$ in den neuen Quotienten b, sondern auch das Quadrat des neuen Quotienten b^2 subtrahiren.

Zusatz.

81. Setzet $a = a + b$ und $b = c$, so kommt für das Quadrat der trinomischen Wurtzel $(a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$. Und also müßt ihr zu dem binomischen Quadrate noch das Product aus der Summe der beyden Theile der binomischen Wurtzel zweymahl genommen in den dritten Theil, und das Quadrat des dritten Theils addiren. Setzet $a = a + b + c$, und $b = d$, so kommt für das Quadrat der quadrinomischen Wurtzel $(a+b+c)^2 + 2$

$(a+b+c)d+d^2$. Derowegen müsset ihr zu dem Quadrate der trinomischen Wurtzel noch das Product aus der Summe der ersten drey Theile zweymahl genommen in den vierten Theil, und das Quadrat des vierten Theiles, addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der binomischen Formul auch das Quadrat einer jeden polynomischen Wurtzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede polynomische Wurtzel ziehen könnet. Denn $(a+b+c+d+e$ &c.$)^2 =$ $a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2$ $+2(a+b+c+d)e+e^2$ u. s. w. unendlich fort.

Die 7. Erklärung.

82. Eine unreine quadratische Gleichung (Æquatio quadratica affecta) wird genennet in welcher $x^2 \mp ax = \pm b^2$.

Die 23. Aufgabe.

83. Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

Weil $x^2 . ax = . b^2$, so nehmet x für den einen Theil einer binomischen Wurtzel an. Alsdenn wird a, die bekannte Grösse des andern Gliedes, der andere Theil der Wurtzel zweymahl genommen, und also $\frac{1}{2}a$ der andere Theil der Wurtzel seyn: folgends fehlet zu einem vollkommenen Quadrate das Quadrat von $\frac{1}{2}a$, nemlich $\frac{1}{4}aa$ (§. 79.). Wenn ihr nun sol-

solches beyderseits addiret; so lässet sich die Quadratwurtzel ausziehen, und die gegebene Gleichung völlig einrichten.

Es sey $x^2 + ax = b^2$

$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$

$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

$x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$

Es sey ferner

$x^2 - ax = b^2$

so ist $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$

$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

oder $\frac{1}{2}a - x$

folgends $x = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Denn weil $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ grösser als $\frac{1}{2}a$ ist; so gehet die andere Wurtzel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ nicht an.

Es sey endlich

$x^2 - ax = -b^2$

so ist $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$

$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$

oder $\frac{1}{2}a - x$

$x = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$

Weil $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$ kleiner als $\frac{1}{2}a$; so lässet es sich von $\frac{1}{2}a$ subtrahiren, und also gehen beyde Wurtzeln an.

Nemlich dieses findet statt, wenn man zwey unbekannte Grössen hat, und es gilt gleich viel, welche von beyden man x nennet, indem immer einerley Gleichungen heraus kommen.

Anmerckung.

84. Den Nutzen dieser Regel werdet ihr insküntige überflüssig sehen. Jetzt vergnüget mich dieselbe durch die beyden folgenden Aufgaben zu erläutern.

Die 24. Aufgabe.

85. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihr Product, ihre Summe und die Differentz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Auflösung.

Es sey die grosse Zahl $= x$
die kleine $= y$, so ist

$x^2 - y^2 = xy$ $\quad xy = x + y$

$xy - y = x$

$y = x : (x - 1)$

Wenn ihr den Werth y in der ersten Gleichung an seine Stelle setzet, so bekommt ihr, weil $y^2 = x^2 : (x-1)^2$ und $xy = x^2 : (x-1)$,

x^2

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2-2x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

x^2-2x+1 *mult.*

$x^4-2x^3+x^2-x^2=x^3-x^2$

$x^4-3x^3=-x^2$

x^2 *div.*

$x^2-3x=-1$

$\frac{9}{4}$ $\frac{9}{4}$ (§. 83.).

$x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$

$x-\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$

oder $\frac{3}{2}-x=$

$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

oder $x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

Ferner weil $xy-x=y$, so ist $x=y:(y-1)$. Wenn ihr diesen Werth in der ersten Gleichung in die Stelle x setzet, so bekommt ihr

$$\frac{y^2}{y^2-2y+1} - y^2 = \frac{y^2}{y-1}$$

und wenn ihr die Reduction wie vorhin anstellet, so findet ihr endlich $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ oder $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

Weil $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ grösser ist als $\frac{1}{2}$; so findet bloß die erste Wurtzel statt. Derowegen weil diese allein mit $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, nicht aber mit $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$; hingegen die falsche Wurtzel $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ die Probe hält; so sind die verlangten Zahlen $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Probe: Denn $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5}$, ingleichen $\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 + \sqrt{5}$. Gleichergestalt ist $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 - \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 - \sqrt{5}$, ingleichen $\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 - \sqrt{5}$.

Die 25. Aufgabe.

86. Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen und ihrer Differentz die Grössen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die gröste Grösse $= x$
die Differentz $= b$ die andere $= y$

So ist,

$a = xy$ $\qquad$ $b = x - y$

$a : y = x$ $\qquad$ $b + y = x$

Folgends $a : y = b + y$

y

$a = by + y^2$

$\frac{1}{4}b^2$ $\qquad$ $\frac{1}{4}b^2$ (§. 83.).

$a + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 + by + y^2$

$\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} = \frac{1}{2}b + y$

$\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}b = y$

Es sey $a=40$, $b=3$, so ist $y=\sqrt{(40+\frac{9}{4})}-\frac{3}{2}=\sqrt{(169:4)}-\frac{3}{2}=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=\frac{10}{2}=5$, und demnach $x=8$.

Probe: Denn $5.8=40$ und $8-5=3$.

Die 26. Aufgabe.

87. Die Natur der dritten Dignität einer binomischen Wurtzel zu finden.

Auflösung.

Ihr habt nur die andere Dignität,

$$a^2+2ab+b^2$$

durch die Wurtzel $a+b$ zu multiplicieren (§. 32.)

$$\begin{array}{r} +a^2b+2ab^2+b^3 \\ a^3+2a^2b+ab^2 \\ \hline \end{array}$$

so ist $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ die verlangte dritte Dignität (§. 78.)

Lehrsatz.

Die dritte Dignität einer binomischen Wurtzel enthält in sich die dritte Dignität der beyden Theile (a^3 und b^3) und ein Product aus dem Quadrate des ersten Theiles dreymahl genommen ($3a^2$), in den andern (b), nebst noch einem andern Producte aus dem ersten Theile dreymahl genommen ($3a$) in das Quadrat des andern Theiles (b^2).

Die 1. Anmerckung.

88. Ihr habt hier abermahls auf eine sehr leichte Art den 3ten Lehrsatz der Rechenkunst (§. 99. *Arithm.*) gefunden, daraus die Ausziehung der Cubicwurtzel hergeleitet worden (§. 103. *Arithm.*) Wenn ihr aber die dort gegebenen Regeln vergessen hättet, könte euch

das allgemeine Exempel $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ an deren statt dienen, Denn ihr sehet, daß wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken die daselbst befindliche dritte Dignität a^3 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurtzel a habet. Wenn ihr nun aus den übrigen Gliedern den andern Theil finden wollet, müsset ihr das erste zur Lincken $3a^2b$ durch das Quadrat des ersten dreymahl genommen ($3a^2$) dividiren, und hernach nicht allein das Product aus diesem Divisor ($3a^2$) in den neuen Quotienten (b), sondern auch das Product aus dem Quadrate des neuen Quotientens (b^2), in den vorhergehenden dreymahl genommen ($3a$), und endlich die dritte Dignität des neuen Quotientens (b^3), abziehen.

Zusatz.

89. Setzet $a=a+b$ und $b=c$, so kommt für die dritte Dignität der trinomischen Wurtzel $a+b+c$ heraus $(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$, und also müsset ihr zu der Dignität der binomischen Wurtzel noch das Product aus dem Quadrate der binomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b)^2$ in den dritten Theil c, das Product aus der binomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b)$ in das Quadrat des dritten Theiles c^2 und die dritte Dignität desselben Theiles c^3 addiren. Setzet $a=a+b+c$ und $b=d$, so ist die dritte Dignität der quadrinomischen Wurtzel $(a+b+c)^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3$; folgends müsset ihr noch zu der Dignität der trinomischen Wurtzel $(a+b+c)^3$ das Product aus dem Quadrate der trinomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b+c)^2$

in

in den vierten Theil d, das Product aus der trinomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b+c)$ in das Quadrat des vierten Theiles d^2, und die dritte Dignität des vierten Theiles d^3 addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der binomischen Regel auch die dritte Dignität einer jeden polynomischen Wurtzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede polynomische Cubicwurtzel ziehen könnt. Denn $(a+b+c+d+e$ &c.$)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3+3(a+b+c+d)^2e+3(a+b+c+d)e^2+e^3$ u. s. w. unendlich fort.

Die 2. Anmerckung.

90. Auf eben solche Weise könnet ihr für die höheren Dignitäten Regeln finden. Und unerachtet ich in der folgenden Aufgabe zeigen werde, wie ihr an statt unendlicher Regeln für unendliche Dignitäten, zu denen eine Grösse erhoben werden kan, eine einige finden könnet; so wird euch die Mühe doch nicht verdrüssen, wenn ihr auf gleiche Art die Natur der vierten, fünften, sechsten Dignität u. s. w. untersuchet. Denn diese Untersuchung selbst wird euch dienen, die allgemeine Regel zu erfinden.

Die 27. Aufgabe.

91. Eine allgemeine Regel zu finden, nach welcher jede binomische Wurtzel zu jeder verlangten Dignität erhoben werden kan.

Auflösung.

Wenn ihr die binomische Wurtzel nach und nach zu ihren Dignitäten erhebet, wie beygefügte Tafel ausweiset.

$1a^1$	$1b$								
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$							
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$						
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$					
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$				
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$			
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$		
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$	
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

so werdet ihr wahrnehmen, daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusammen gesetzet ist, und diese Producte durch verschiedene Zahlen multipliciret werden. Es entstehen aber diese Producte, wenn ihr jeden Theil der Wurtzel zu allen niedrigern Dignitäten als die gegebene ist, erhebet, und sie verkehrt in einander multipliciret. Z. E. In der sechsten Dignität sind alle Dignitäten von 1 bis zu der sechsten der beyden Theile $a^6.a^5.a^4$ $a^3.a^2.a^1.1$. und $1.b.b^2.b^3.b^4.b^5.b^6$. Multipliciret die erste Reihe in die andere, so bekommt ihr $a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6$, das ist, alle Producte, woraus die sechste Dignität bestehet, ausser denen Zahlen, welche sie multipliciren, und nach dem Exempel des *Oughtred* (Clavis Mathemat. c. 12. §. 6. p. m. 38.) sonderlich von denen Engelländern Unciæ genennet werden. Derowegen wenn der Exponente m ist, so sind die Producte $a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+a^{m-3}b^3+a^{m-4}b^4+a^{m-5}b^5+a^{m-6}b^6$ u. s. w. unendlich fort.

Die Unzen.

1+1
1+2+1
1+3+3+1
1+4+6+4+1
1+5+10+10+5+1
1+6+15+20+15+6+1
1+7+21+35+35+21+7+1
&c.

wer-

werden gefunden, wenn ihr die Exponenten der Dignitäten, die in einander multipliciret werden, unter einander schreibet, und den Bruch aus den zwey ersten Zahlen für die Untze des andern Gliedes, den Bruch aus den beyden ersten oberen und beyden ersten unteren Zahlen zur Untze des dritten Gliedes nehmet ꝛc. Z. E. Es sollen die Untzen für die sechste Dignität gefunden werden; so schreibet die angeführten Exponenten dergestalt untereinander:

6. 5. 4. 3. 2. 1
1. 2. 3. 4. 5. 6

Alsdenn ist $\frac{6}{1} = 6$ die Untze des anderen Gliedes, $\frac{6.5}{1.2} = 15$ die Untze des dritten, $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ die Untze des vierten, $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$ die Untze des fünften, $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6$ die Untze des sechsten, und endlich $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1$ die Untze des letzten Gliedes.

Auf eben solche Art werden die Untzen gefunden, wenn die Exponenten undeterminiret sind. Man schreibet sie nemlich dergestalt untereinander:

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.\text{ꝛc.}}{1.2\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6}$$

und nimmt $\frac{m}{1}$ für die Untze des anderen Gliedes; $\frac{m.m-1}{1.2.}$ für die Untze des dritten, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.}$ für die Untzen des vierten, $\frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4.}$ für die Untze des fünften $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.}{1.2.3.4.5.}$ für die Untze des sechsten, $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.}{1.2.3.4.5.6.}$ für die Untze des siebenten &c.

Wenn ihr nun diese Uncias in die oben gefundene Producte multipliciret; so bekommt ihr für die Dignität m von $a+b$.

$$a^m + \frac{m}{1.}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2.}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.}{1.2.}\frac{m-2.}{3.}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3.}\frac{m-3.}{4.}a^{m-4}b^4 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4.}\frac{m-4.}{5.}a^{m-5}b^5 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.}{1.2.3.4.5.}\frac{m-5}{6.}a^{m-6}b^6 \text{ &c.}$$

Das

Das ist, weil $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a^2$, $a^{m-3} = a^m : a^3$, $a^{m-4} = a^m : a^4$ &c. (§. 39.),

$$a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-5}b^5 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-6}b^6 \text{ &c.}$$

Wenn ihr nun ferner $a = P$ und $b : a = Q$, das erste Glied $= A$, das andere $= B$; das dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$ u. s. w. setzet; so findet ihr endlich $(P + PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}FQ$ u. s. w. unendlich fort.

Also habt ihr eine allgemeine Regel gefunden, nach welcher ihr eine jede binomische Wurtzel zu einer jeden verlangten Dignität erheben könnet.

Die 1. Anmerckung.

92. Ihr verlanget die vierte Dignität von 18 oder

10+8, so ist $m=4$, P=10, Q=8:10=4:5,
folgends $P^m = 10^4 = 10000 = A$,

m. AQ=4. 10000. $\frac{4}{5}$=32000=B

$m-1$ BQ=$\frac{3}{2}$. 32000. $\frac{4}{5}$=38400=C

$m-2$ CQ=$\frac{2}{3}$. 38400. $\frac{4}{5}$=20480=D

$m-3$ DQ=$\frac{1}{4}$. 20480. $\frac{4}{5}$= 4096=E

$m-4$ EQ=0. 4096. $\frac{4}{5}$= 0=F

10000=A
32000=B
38400=C
20480=D
4096=E

104976 vierte Dignität von 18.

Die 2. Anmerckung.

93. Ihr werdet vielleicht meynen, daß man mit leichter Mühe durch das gewöhnliche multipliciren die gegebenen Zahlen zu der verlangten Dignität erheben kan, und dannenhero die gefundene allgemeine Regel für unnütze halten. Allein ihr sollet zu seiner Zeit erfahren, wie sehr ihr euch in eurer Meinung betrogen, wenn ihr ihren vielfältigen Nutzen verspühren werdet. Jetzt erinnere ich nur dieses. Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurtzel ausziehen sollet; so könnet ihr die Regeln, nach welchen solches geschiehet, wie für die Quadrat und Cubicwurtzel (§. 80. 88.) finden, wenn ihr

durch die gefundene allgemeine Regel die binomische Wurtzel $a + b$ zu der gehörigen Dignität erhebet. Z. E. Ihr sollet die Wurtzel der fünften Dignität aus einer gegebenen Zahl ziehen; so dörfet ihr nur $a + b$ zu der fünften Dignität erheben. Das allgemeine Exempel wird euch die Regel bald an die Hand geben.

Die 3. Anmerckung.

94. Gleichwie ihr aber schon oben gesehen habt, daß die Regeln für die binomische Wurtzeln auch denen eine polynomische Wurtzel zu der andern und dritten Dignität zu erheben (§. 81. 89.); also gehet es auch an, daß ihr nach dieser allgemeinen Regel, die zwar eigentlich auch nur auf binomische Wurtzeln gerichtet ist, auf eine gleiche Weise eine jede polynomische Wurtzel zu der verlangten Dignität erhebet, und die Wurtzel selbst nach derselben findet: wie aus folgender Aufgabe zu ersehen.

Die 28. Aufgabe.

95. Eine allgemeine Regel zu finden, aus allen Dignitäten eine verlangte binomische Wurtzel zu ziehen.

Auflösung.

Weil $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 42.), so ist das Wurtzelausziehen so viel als eine Grösse zu einer Dignität erheben, die zu ihrem Exponenten eine gebrochene Zahl hat. Derowegen wenn ihr in der vorhin gefundenen Regel an statt des Exponenten m den Exponenten $m:n$ setzet, so bekommet ihr eine allgemeine Regel, nach welcher sowohl jede Grösse zu einer verlangten Dignität erhoben, als aus derselben

selben eine verlangte Wurtzel gezogen werden kan. Es ist aber folgende.

$$\sqrt[n]{(P+PQ)^m} = P^{m:n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ + \frac{m-5n}{6n}FQ \text{ u. s. w. unendlich fort.}$$

Die 1. Anmerckung.

96. Diese sehr nützliche Regel hat der vortrefliche Geometra in Engelland *Isaac Newton* zuerst gefunden, wiewohl auf eine andere Art, als ich gewiesen habe: wie solches aus dem Briefe erhellet, den er An. 1676. an den unvergleichlichen Mathematicum und Polyhistorem, den Herrn Reichs-Hofrath von Leibnitz, geschrieben, und *Wallisius* mit in den dritten Theil seiner mathematischen Wercke f. 622. drucken lassen. Es ist aber diese Regel einerley mit der vorigen. Denn wie ihr $m:n$ durch gantze Zahlen in dem Gebrauche derselben erklären könnet, wenn ihr $n = 1$ setzet: so könnet ihr auch in der vorigen Regel m durch einen Bruch erklären, wenn eine Wurtzel ausgezogen werden soll. Z. E. Ihr setzet $m = \frac{1}{2}$ wenn ihr die Quadratwurtzel verlanget; $m = \frac{1}{3}$, wenn ihr die Cubicwurtzel suchet u. s. w.

Die 2. Anmerckung.

97. Damit ihr aber den Gebrauch der Regel deutlich erkennen möget: so will ich selbige mit einem Exempel erläutern. Ihr verlanget zu wissen die Quadratwurtzel aus $aa - x^2$: so ist $m = 1, n = 2$, $P = a^2$, $Q = -x^2 : a^2$, folgends:

$P^{m:n} = a = A$

$+\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2}a. - x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$

$+\frac{m-n}{2n} BQ = 1 - \frac{2}{4} \cdot -\frac{x^2}{2a} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$

$+\frac{m-2n}{3n} CQ = 1 - \frac{4}{6} \cdot -\frac{x^4}{8a^3} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^6}{16a^5} = D$

$+\frac{m-3n}{4n} DQ = 1 - \frac{6}{8} \cdot -\frac{x^6}{16a^5} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$

$+\frac{m-4n}{5n} EQ = 1 - \frac{8}{10} \cdot -\frac{5x^8}{128a^7} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -\frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c.

Demnach ist $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$

$- \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ u. s. w. unendlich fort.

Die 3. Anmerckung.

98. Wenn man aus der gegebenen Grösse eine vollkommene Wurtzel haben kan, so ist die Zahl der Glieder allezeit endlich. Hingegen wo dergleichen nicht vorhanden, so gehen die Glieder unendlich fort. Man nimmt aber von denselben so viele in jedem Falle als nöthig ist, bis nemlich durch Weglassung der übrigen kein mercklicher Fehler entstehet.

Die 4. Anmerckung.

99. Wenn einem die 27. und 28. Aufgabe zu schwer vorkommen solte, der kan sie so lange bey Seite setzen, bis wir unten ihrer nöthig haben werden.

Die

Die 29. Aufgabe.

100. Die Differenz zweyer Quadrate zu finden, deren Wurzeln um 1 unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurzel n, die andere $n+1$, so ist das Quadrat der grossen n^2+2n+1
——— der kleinen n^2
die Differenz $2n+1$.

Wenn nun jede Zahl zweymahl genommen eine gerade Zahl bringet, und eine gerade Zahl von einer ungeraden um 1 unterschieden ist; so ist die Differenz zweyer Quadrate, deren Wurzeln um 1 unterschieden sind, eine ungerade Zahl, die der Summe der Wurzeln gleich ist. Es seyn die Wurzeln 8 und 9, so ist die Differenz ihrer Quadrate $17=8+9$.

Der 1. Zusatz.

101. Also kan man durch blosse Addition die Quadratzahlen aller Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung finden. Man darf nemlich nur zu dem vorhergehenden Quadrate beständig seine und zugleich die folgende Wurzel addiren.

Der 2. Zusatz.

102. Die Quadratzahlen werden auch in ihrer Ordnung nach einander gefunden, wenn

man die ungeraden Zahlen in ihrer Ordnung zu einander addiret.

Wurtzeln.	ungerade Zahl.	Quad. Zahl.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

Die 30. Aufgabe.

103. Den Unterschied zweyer Cubiczahlen zu finden, deren Wurtzeln um 1 von einander unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurtzel $= n$, die andere $n+1$

so ist

die grosse Cubiczahl $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

die kleine n^3

der Unterschied $3n^2 + 3n + 1$

Das

Das ist $n^2 + 2n + 1 + 2n^2 + n = (n+1)^2; + 2n^2 + n$. Also ist der verlangte Unterschied die Summe aus dem Quadrate der grossen Wurtzel und dem Quadrate der kleinen zweymahl genommen, und der kleinen Wurtzel. Z. E. Es seyn die Wurtzeln 8 und 9; so ist der Unterschied ihrer Cubiczahlen $217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2.8^2 + 8$.

Setzet ferner die dritte Wurtzel $n+2$ so ist die Cubiczahl

$$n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

Die vorige $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

Der Unterschied $3n^2 + 9n + 7$

Der erste Unterschied $3n^2 + 3n + 1$

Der andere Untersch. $6n + 6 = 6(n+1)$

Also ist der andere Unterschied zweyer Cubiczahlen die Wurtzel der kleinern 6 mahl genommen.

Zusatz.

104. Wenn man also die Quadratzahlen in ihrer Ordnung nach einander gefunden (§. 101. 102.); so kan man daraus die Cubiczahlen durch blosse Addition finden aus dem ersten Unterschiede. Oder wenn man die Cubiczahlen ohne die Quadratzahlen finden will; so addiret man erstlich den andern Unterschied 1.6.12.18.24.30 ꝛc. um den ersten zu finden, und darnach den ersten Unterschied

um die Cubiczahlen zu erhalten, wie aus beygesetztem Täfelein abzunehmen.

Wurtzeln	ander. Unterschied.	erster Unterschied.	Cubiczahlen.
1	1	1	1
2	6	7	8
3	12	19	27
4	18	37	64
5	24	61	125
6	30	91	216
7	36	127	343
8	42	169	512
9	48	217	729
10	54	271	1000

Die 31. Aufgabe.

105. Zu finden, was für eine Zahl herauskommt, wenn man eine gerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander abziehet, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Weil eine gerade Zahl sich in zwey gleiche Theile theilen lässet, eine ungerade aber um 1 von einer geraden unterschieden ist; so nennet die gerade Zahl $2x$, die ungerade $2y+1$

$2y+1$		$2y+1$	$2y+1$
$2x$		$2x$	$2x$
Summe $2x+2y+1$	Differ. $2y+1-2x$		Prod. $4xy+2x$

Die

Die Summe und Differentz sind ungerade Zahlen, das Product ist eine gerade Zahl. Denn dieses lässet sich halbiren, jene nicht.

Die 32. Aufgabe.

106. Zu finden, was für eine Zahl herauskommt, wenn man eine gerade Zahl zu einer geraden addiret, oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine gerade Zahl $2x$, die andere $2y$. So ist die Summe $2x + 2y$, die Differentz $2x - 2y$, das Product $4xy$ und also sind alle drey gerade Zahlen, denn sie lassen sich halbiren.

Die 33. Aufgabe.

107. Zu finden, was für Zahlen herauskommen, wenn ihr eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine ungerade Zahl $2x + 1$, die andere $2y + 1$.

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2y+1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x+1 \\ 2y+1 \\ \hline \end{array}$$

Summe $= 2x + 2y + 2$ Differ. $= 2x - 2y$

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2y+1 \\ \hline +2x+1 \\ 4xy+2y \\ \hline \end{array}$$

Product $= 4xy+2x+2y+1$

Die Summe und Differentz lassen sich halbiren, sind also gerade Zahlen. Das Product lässet sich nicht halbiren: ist also eine ungerade Zahl.

Die 34. Aufgabe.

108. Zu finden, was für Zahlen herauskommen, wenn ihr lauter gerade Zahlen, oder eine gerade Anzahl ungerader Zahlen, oder auch eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen addiret.

Auflösung.

Es seyn die gerade Zahlen $2x$, $2y$, $2z$, $2t$. u. s. w. so ist die Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. das ist $2(x+y+z+t$ ꝛc.) also eine gerade Zahl. Derowegen die Summe von lauter geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$. u. s. w. ihre Anzahl $2m$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m$, das ist $2(x+y+z+t$ ꝛc.$)+2m$, folgends eine gerade Zahl.

Dero-

Derowegen wenn lauter ungerade Zahlen in gerader Anzahl zusammen addiret werden, so ist die Summe eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen abermahls $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m+1$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m+1$, das ist, $2(x+y+z+t$ &c.$)+2m+1$, folgends eine ungerade Zahl. Derowegen wenn lauter ungerade Zahlen in ungerader Anzahl zusammen addiret werden, so ist die Summe eine ungerade Zahl.

Anmerckung.

109. Wenn diese Aufgaben gleich sonst keinen Nutzen hätten, so sollten sie euch doch angenehm seyn, weil sie euch eine neue Maxime der Benennung an die Hand geben. Ihr werdet aber auch bey andern Gelegenheiten ihren Nutzen verspühren. Z. E. Wenn einer verlanget, ihr soltet 20 in 5 ungerade Zahlen theilen: so werdet ihr bald sehen, daß dieses unmöglich sey, weil ungerade Zahlen in ungerader Anzahl eine ungerade Zahl bringen, wenn sie summiret werden.

Die 35. Aufgabe.

110. Zu finden, was für eine Dignität herauskommt, wenn man eine Quadrat- oder Cubiczahl durch sich selbst multipliciret.

Auflösung.

Es sey die Quadratzahl x^2, die Cubiczahl x^3. Multiplicirt jede durch sich selbst, so kommt in dem ersten Falle x^4, in dem andern x^6.

Weil

Weil der Exponente 4 sich durch 2, der Exponente 6 aber so wohl durch 2 als durch 3 sich dividiren lässet; so ist x^4 ein Quadrat, x^6 aber zugleich eine Quadrat- und eine Cubiczahl. Derowegen wenn eine Quadratzahl durch sich selbst multipliciret wird, so ist das Product eine vierte Dignität und Quadratzahl; wenn eine Cubiczahl durch sich selbst multipliciret wird, so ist das Product zugleich eine Quadrat- und auch eine Cubiczahl.

Anmerckung.

111. Auf diese Manier könnt ihr noch gar viel andere dergleichen Lehrsätze finden, wenn ihr dieselben nöthig habt.

Die 36. Aufgabe.

112. Zu finden, wie groß in einer arithmetischen Progreßion die Summe der beyden äussersten Glieder sey.

Auflösung.

Es sey das erste Glied a, der Unterschied der Glieder d, so ist die Progreßion (§. 69. *Arithm.*).

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d$$

$$\frac{a+4d}{2a+5d} = \frac{a+2d}{2a+5d} = \frac{a}{2a+5d}$$

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$$

$$\frac{a+3d}{2a+4d} = \frac{2}{2a+4d} = \frac{a}{2a+4d}$$

Lehr-

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Progreßion ist die Summe der beyden äussersten Glieder der Summe jeder zweyen Glieder gleich, die von den äussersten gleich weit abstehen, ingleichen zweymahl so groß als das mittlere, wenn die Glieder an der Zahl ungleich sind.

Z. E.	3.	6.	9.	12.	15.	18.	21
				12	9	6	3

24 = 24 = 24 = 24

Der 1. Zusatz.

113. Derowegen bekommt ihr die Summe der gantzen Progreßion, wenn ihr die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder multiplicirt. Es sey das erste Glied a, die Differentz d, die Zahl der Glieder n, so ist das letzte Glied $a + (n-1)d$, folgends die Summe der Progreßion $(2a + (n-1)d)\frac{1}{2}n = an + (n^2 - n)\frac{1}{2}d$. Es sey z. E. $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$, so ist die Summe der Progreßion $21 + (49 - 7)\frac{3}{2} = 21 + 42.\frac{3}{2} = 21 + 21.3 = 21 + 63 = 84$.

Der 2. Zusatz.

114. Ihr könnet demnach die Summe einer arithmetischen Progreßion finden, wenn

euch

euch das erste Glied, der Unterschied und die Zahl der Glieder gegeben sind.

Der 3. Zusatz.

115. Es sey $a=1, d=2$ die Zahl der Glieder $=n$; so ist die Summe der Progreßion $n+n^2-n=n^2$: woraus von neuem erhellet, daß die Quadratzahlen herauskommen, wenn man die ungeraden Zahlen, das ist, die Glieder in der arithmetischen Progression 1. 3. 5. 7. 9. 11. u. s. w. zusammen addiret.

Der 4. Zusatz.

116. Es sey $a=\frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied sey dem halben Unterschiede der Glieder gleich; so ist die Summe der Progreßion $an+an^2-an=an^2$.

Der 5. Zusatz.

117. Es sey $a=n=\frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied, die Zahl und der halbe Unterschied der Glieder sind einander gleich; so ist die Summe $n^2+n^3-n^2=n^3$, das ist, der Cubus vom dem ersten Gliede. Z. E. $a=n=\frac{1}{2}d=8$, oder die Progreßion 8. 24. 40. 56. 72. 88. 104. 120; so ist die Summe 512. oder die Cubiczahl von 8.

Anmerckung.

118. Hieraus erhellet, wie man aus allgemeinen Lehrsätzen besondere finden kan.

Die

Die 37. Aufgabe.

119. Aus dem ersten und letzten Gliede einer arithmetischen Progreßion und dem Unterschiede der Glieder, ihre Zahl und die Summe der Progreßion zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$

das letzte $= b$ die Summe $= y$

der Unterschied $= d$

So ist (§. 113.)

$b = a + dx - d$; $y = \frac{1}{2}(b+a)x$

$\frac{\quad}{\quad} = \frac{(b+a)(b-a)}{2d} + \frac{1}{2}(b+a)$

$b - a + d = dx$

$\frac{\quad}{\quad} = d$

$\frac{b-a}{d} + 1 = x$ $= \frac{b^2 - a^2}{2d} + \frac{b+a}{2}$

Es sey z. E. $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$, so ist $x = (17-2) : 3 + 1 = 15 : 3 + 1 = 6$ und $y = \frac{1}{2}(17+2) + (289-4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

Probe: Denn $a + dx - d = 2 + 3.6 - 3 = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$ und $\frac{1}{2}(b+a)x = \frac{6}{2}(17+2) = 3.19 = 57$.

Die 38. Aufgabe.

120. Aus dem ersten Gliede, dem Unterschiede der Glieder, und der Summe einer arithmetischen Progreßion die Zahl der Glieder und das letzte Glied zu finden.

Auf-

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$
der Unterschied $= d$ das letzte Glied $= y$
die Summe $= c$

So ist (§. 113.)

$\frac{1}{2}x(a+y)=c$ $\quad a+dx-d=y$

$ax+xy=2c$

$xy=2c-ax$

$y=(2c-ax):x$ folgends

$(2c-ax):x=a+dx-d$

$2c-ax=dx^2+ax-dx$

$2c:d=x^2+(2a-d)x$

Setzet $(2a-d):d=m$, so ist

$2c:d=x^2+mx$

$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$ (§. 83.).

$\frac{1}{4}m^2+2c:d=x^2+mx+\frac{1}{4}m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c:d)}-\frac{1}{2}m=+x$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c:d)}-\frac{1}{2}m=x$

Oder

Oder $x = \frac{\sqrt{(4a^2 - 4ad + d^2 + 2c)} - 2a + d}{2d}$

folgends

$y = \sqrt{(2cd + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2)} - \frac{1}{2}d$

$= \sqrt{(2cd + (a - \frac{1}{2}d)^2)} - \frac{1}{2}d$

Es sey $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$, so ist $m = (4 - 3)$: $3 = \frac{1}{3}$, folgends $x = \sqrt{(\frac{1}{36} + 114\frac{4}{3})} - \frac{1}{6} = \sqrt{12\frac{69}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$. Ferner ist $y = \sqrt{(342 + \frac{1}{4})} - 1\frac{1}{2} = 18\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 17$.

Probe: Denn $(2 + 17)\ 3 = 3.19 = 57$ und $2 + 3.6 - 3 = 2 + 18 - 3 = 17$.

Die 39. Aufgabe.

121. Aus dem ersten und letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progreßion die Zahl und den Unterschied der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$

das letzte $= b$ der Unterschied $= y$

die Summe $= c$

So ist (§. 113.)

$\frac{1}{2}x(a + b) = c$

$x\ (a + b) = 2c$

$x = 2c : (a + b)$

$a + xy - y = b$

$xy - y = b - a$

$xy = b + y - a$

$x = (b + y - a) : y$

Folgends

$$2c : (a+b) = (b+y-a) : y$$

$$2cy : (a+b) = b+y-a$$

$$2cy = ab+ay-a^2+b^2+by-ab$$

$$2cy-ay-by = b^2-a^2$$

$$y = (b^2-a^2) : (2c-a-b)$$

Es sey $a=2, b=17, c=57$, so ist $x=114 : (2+17)=114:19=6$, und $y=(289-4) : (114-19)=285:95=3$.

Probe: Denn $3(2+17)=3.19=57$ und $2+3.6-3=2+18-3=17$, wie vorhin (§. 120.).

Die 40. Aufgabe.

122. Aus dem Unterschiede und der Zahl der Glieder, ingleichen der Summe einer arithmetischen Progreßion, das erste und letzte Glied, und folgends alle übrigen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Glieder $=n$ das erste Glied $=x$
der Unterschied $=d$ das letzte $=y$
die Summe $=c$

So ist (§. 113.)

$\frac{1}{2}n$

$\frac{\frac{1}{2}n(x+y)=c}{n(x+y)=c}^{2}{}_{n}$

$x+y=2c:n$

$y=2c:n-x$ Folgends

$2c:n-x=x+nd-d$

$2c:n+d-nd=2x$

$c:n+\frac{1}{2}(d-nd)=x$

$y=x+nd-d$

Es sey $n=6$, $d=3$, $c=57$, so ist $x=57+3-18=57+9-9=66-9=11-9=2$ und $y=114-2=19-2=17$.

Die Probe ist wie vorhin (§. 120.).

Die 41. Aufgabe.

123. Aus dem Unterschiede der Glieder, dem letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progreßion das erste Glied und die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das letzte Glied $=b$ das erste Glied $=x$

der Unterschied $=d$ die Zahl der Glieder $=y$

die Summe $=c$

So ist (§. 113.)

$\frac{1}{2}y(x+b)=c \quad | \cdot 2$

$y(x+b)=2c \quad | : y$

$x+b=2c:y \quad | -b$

$x=2c-b$

$\frac{}{y}$

Folgends

$\frac{2c-b=b+d-dy}{y}$

$2c-b=b+d-dy \quad | \cdot y$

$2c-by=by+dy-dy^2 \quad | -dy^2$

$dy^2-2by-dy=-2c \quad | \cdot d$

$y^2-\frac{(2b+d)y}{d}=-2c:d$

Setzet $(2b+d):d=m$, so ist

$y^2-my=-2c:d$

$\frac{1}{4}m^2 \quad | \frac{1}{4}m^2$ (§. 83.)

$y^2-my+\frac{1}{4}m^2=\frac{1}{4}m^2-2c:d$

$\frac{1}{2}m-y$ oder $y-\frac{1}{2}m=\sqrt{(\frac{1}{4}m^2-2c:d)}$

$y=\frac{1}{2}m\pm\sqrt{(\frac{1}{4}m^2-2c:d)}$

$y=\frac{2b+d}{2d}\pm\sqrt{(\frac{4b^2+4bd+d^2}{4d^2}-\frac{2c}{d})}$

$=\frac{2b+d\pm\sqrt{(4b^2+4bd+d^2-8cd)}}{2d}$

fol-

folgends

$x = b + d - b - \frac{1}{2}d \mp \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$

$= \frac{1}{2}d \mp \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$

Es ist aber $4b^2 + 4bd + d^2 = (2b + d)^2$

Es sey $b = 17$, $d = 3$, $c = 57$,

so ist $2b + d = 34 + 3 = 37$, folgends

$y = \frac{37 - \sqrt{(1369 - 1368)}}{6} = \frac{37 - 1}{6} = \frac{36}{6} =$

6 und $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Die Probe ist wie vorhin (§. 120.).

Die 42. Aufgabe.

124. Aus der Summe einer arithmetischen Progreßion, der Zahl der Glieder und dem Producte aus dem ersten Gliede in das letzte, die Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ das erste Glied $= x$
die Zahl der Glieder $= n$ das letzte $= y$
die Summe $= c$

So ist

$\frac{1}{2}n(x + y) = c$ (§. 113.) $a = xy$

$n(x + y) = 2c$ $a : x = y$

$x + y = 2c : n$

$y = \frac{2c}{n} - x$

folgends

$$a : x = 2c : n - x$$

$$a = 2cx - x^2 : n$$

$$x^2 - 2cx : n = -a$$

$$c^2 : n^2 \quad c^2 : n^2$$

$$x^2 - 2cx : n + c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a$$

$$\mp c : n \mp x = \sqrt{(c^2 : n^2 - a)}$$

$$c : n \mp \sqrt{(c^2 : n^2 - a)} = x$$

Nemlich wenn man das Zeichen — braucht, so bekommt man x; wenn man das Zeichen + brauchet, bekommt man y.

Es sey $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$, so ist $x = 57 : 6 - \sqrt{(3249 : 36 - 34)} = 57 : 6 - \sqrt{(3249 - 1224) : 36}$

$= 57 : 6 - \sqrt{2025 : 36} = 57 : 6 - 45 : 6 = 12 : 6 = 2$ und

hingegen $y = 57 + 45 : 6 = 102 : 6 = 17$.

Pro-

Probe: Denn $\frac{6}{2}(2+17)=3.19=57$ und $2.17=34$.

Die 8. Erklärung.

125. Wenn man etliche Glieder von einer arithmetischen Progreßion, die sich von 1 anfänget, zu einander addiret; so heisset die Summe eine Polygonalzahl (*Numerus Polygonus*).

Die 9. Erklärung.

126. Insbesondere heisset es eine Triangularzahl, wenn die Differentz der Glieder in der Progreßion 1 ist; eine Quadratzahl, wenn sie 2 ist; eine Pentagonalzahl, wenn sie 3 ist; eine Hexagonalzahl, wenn sie 4 ist u. s. w.

Arithm. Progr.	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8
Triang. Zahlen.	1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36
Arithm. Progr.	1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15
Quadr. Zahlen.	1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64
Arithm. Progr.	1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22
Pentagonalzahl.	1. 5. 12. 22. 35. 51. 70. 92
Arithm. Progr.	1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29
Hexagonalzahl.	1. 6. 15. 28. 45. 66. 91. 120

Anmerckung.

127. Ihr werdet inskünftige erfahren, daß es nicht ohne Nutzen sey, wenn man allerhand Progreßionen der Zahlen summiren lernet. Zu dem Ende wollen wir auch untersuchen, wie man die Polygonalzahlen summiren kan.

Die 10. Erklärung.

128. Die Seite der Polygonalzahl heisset die Zahl der Glieder, welche von der Progreßion summiret worden, damit dieselbe entstanden.

Anmerckung.

129. Die Polygonalzahlen haben ihren Namen von den regulären Figuren, darein sich die Einheiten, daraus sie bestehen, versetzen lassen. Es kommen aber in die Seite der Figur jederzeit so viel Einheiten oder Puncte (wodurch sie angedeutet werden) als Glieder von der Progreßion summiret worden, damit man die Polygonalzahl bekomme.

Die 11. Erklärung.

130. Durch die Zahl der Winkel verstehen wir diejenige, welche andeutet, wie viel Winkel die Figur hat, von der die Polygonalzahl ihren Namen bekommt.

Der 1. Zusatz.

131. Also ist die Zahl der Winkel in Trigonalzahlen 3; in Quadrat- oder Tetragonalzahlen 4; in Pentagonalzahlen 5 u. s. w.

Der 2. Zusatz.

132. Da nun in Trigonalzahlen der Unterschied der Glieder 1, in Quadratzahlen 2, in Pentagonalzahlen 3 u. s. w. ist; so ist die Zahl der Winkel jederzeit um 2 grösser als der Unterschied der Glieder in der Progreßion, durch deren Summirung die Polygonalzahlen entstehen.

Die

Die 43. Aufgabe.

133. Aus der gegebenen Seite einer Polygonalzahl und der Zahl der Winkel die Polygonalzahl zu finden.

Auflösung.

Es sey die Seite $= a$
Die Zahl der Winkel $= n$
das erste Glied der Progr. ist $= 1$ (§. 125.)
der Unterschied der Glieder $= n - 2$ (§. 132.)
das letzte Glied $1 + (n-2)(a-1)$ (§. 113.)
$= an - 2a - n + 3$
das erste Glied $= 1$

Summe des ersten und letzten $an - 2a - n + 4$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}a$ (§. 128.).

Polygonalzahl $\frac{1}{2}a^2n - a^2 - \frac{1}{2}an + 2a$ (§. 113.) $=$
$a^2n - 2a^2 - an + 4a = (n-2)a^2 - a(n-4)$

Es sey $n = 3$, so ist die Trigonalzahl $= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$.

Es sey $n = 4$, so ist die Tetragonalzahl $= \frac{2}{2}a^2 - \frac{0}{2}a = a^2$.

Es sey $n = 5$, so ist die Pentagonalzahl $= \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a$.

Es sey $n=6$, so ist die Hexagonalzahl $= \frac{4a^2-2a}{2} = 2a^2-a$.

Es sey $n=7$, so ist die Heptagonalzahl $= \frac{5a^2-3a}{2}$.

Es sey $n=8$, so ist die Octogonalzahl $= \frac{6a^2-4a}{2} = 3a^2-2a$ u. s. w. unendlich fort.

Nemlich die um zwey verminderte Zahl der Winkel wird durch das Quadrat der Seite, und die um 4 verminderte Zahl der Winkel durch die Seite der Polygonalzahl multipliciret; das letzte Product aber von dem ersten abgezogen und der Rest durch zwey dividiret.

Exempel.

Ihr sollet die sechste Trigonalzahl finden. Weil $a=6$; so ist $\frac{a^2+a}{2} = \frac{36+6}{2} = 18+3=21$. Wenn ihr die achte Pentagonalzahl suchet; so ist $a=8$, und also $\frac{3a^2-a}{2} = \frac{3.64-8}{2} = 3.32-4=96-4=92$. Wenn ihr die fünfte Hexagonalzahl suchet, so ist $a=5$, und also $2a^2-a=50-5=45$.

Die

Die 44. Aufgabe.

134. Aus der gegebenen Polygonalzahl und der Zahl der Winkel die Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey die Polygonalzahl $= p$ die Seite
die Zahl der Winkel $= n$ $= x$

So ist der Unterschied der Glieder $n - 2$ (§. 132.)

das erste Glied 1 (§. 125.)

Derowegen das letzte $1 + (x - 1)(n - 2)$ (§. 113. 128.).

das ist $3 + nx - 2x - n$
das erste Glied 1

Summe des ersten und letzten $4 + nx - 2x - n$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}x$ (§. 128.)

$$2x + \tfrac{1}{2}nx^2 - x^2 - \tfrac{1}{2}nx$$

Derowegen ist

$$\frac{\frac{1}{2}nx^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}nx = p}{2}$$

$$nx^2 - 2x^2 - nx + 4x = 2p$$

$$\frac{}{n-2}$$

$$x^2 - \left(\frac{n-4}{n-2}\right)x = \frac{2p}{n-2}$$

Das ist, wenn $(n-4):(n-2) = m$

$x^2 -$

$$x^2 - mx = 2p : (n-2)$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$x^2 - mx + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2)$$

$$x - \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2))}$$

$$x = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2))}$$

Das ist, wenn man vor m seinen Werth setzet,

$$x = \frac{n-4}{2n-4} + \sqrt{\left\{\frac{n^2-8n+16}{+n^2-16n+16} + \frac{4p}{2n-4}\right\}} =$$

$$\frac{n-4+\sqrt{(8p(n-2)+(n-4)^2)}}{2n-4}$$

Es sey $n = 3$; so ist $x = \frac{-1+\sqrt{(8p+1)}}{2}$

Es sey $n = 4$; so ist $x = \frac{0+\sqrt{(16p+0)}}{4}$

Es sey $n = 5$; so ist $x = \frac{1+\sqrt{(24p+1)}}{6}$

Es sey $n = 6$; so ist $x = \frac{2+\sqrt{(32p+4)}}{8}$

Es sey $n = 7$; so ist $x = \frac{3+\sqrt{(40p+9)}}{10}$

Es sey $n = 8$; so ist $x = \frac{4+\sqrt{(48p+16)}}{12}$

u. s. w. unendlich fort.

Wenn

Wenn ihr diese Polygonalzahlen betrachtet, so werdet ihr wahrnehmen, (1) daß überall die Zahl ausser dem Wurtzelzeichen, die um 4 verringerte Zahl der Winkel; und (2) daß die andere Zahl unter dem Wurtzelzeichen das Quadrat von dieser Zahl sey; (3) die erste aber dem Producte aus der Polygonalzahl in den Divisor viermahl genommen, gleiche, und (4) der Divisor die Summe der Zahl ausser dem Wurtzelzeichen und der Zahl der Winkel ausmache.

Es sey 21 eine Trigonalzahl: ihr sollt die Seite finden, das ist, die wie vielste sie in ihrer Ordnung ist. Weil $p = 21$, so ist die verlangte Seite $= \frac{-1+\sqrt{(168+1)}}{2} = \frac{-1+\sqrt{169}}{2} = \frac{-1+13}{2} = \frac{12}{2} = 6$. Es sey $p = 45$ und zwar eine Hexagonalzahl; so ist die verlangte Seite $= \frac{2+\sqrt{(32.45+4)}}{8} = \frac{2+\sqrt{1444}}{8} = \frac{2+38}{8} = \frac{40}{8} = 5$.

Zusatz.

135. Wenn ihr also nach und nach eine gegebene Zahl in die Stelle von p setzet; so werdet ihr sehen, ob sie mit unter die Polygonalzahlen gehöre, und in welche Reihe derselben sie

sie zu setzen sey. Denn sie findet in allen Reihen statt, wo für ihre Seite eine gantze Rationalzahl heraus kommt. Also wenn euch 21 wäre gegeben worden, würdet ihr gefunden haben, daß es die sechste Trigonalzahl sey.

Anmerckung.

136. Ihr dörfet aber nicht weiter versuchen, ob die gegebene Zahl sich für p setzen lasse, wenn ihr die Zahl der Winkel gleich wird, als in dem gegebenen Exempel 21.

Die 45. Aufgabe.

137. Die Größe des Products der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Proportion zu determiniren.

Auflösung.

Es sey in dem ersten Falle, wenn nur 3 Glieder sind, das erste $= a$, der Exponente $= m$, so ist die Proportion

$\therefore a. ma \quad m^2a$ (§. 66. 68. *Arithm.*)

$$\frac{ma}{(ma)^2} = \frac{a}{m^2a^2}$$ (§. 88. *Arithm.*)

Es sey in dem andern Falle, wenn 4 Glieder sind, das erste $= a$, der Exponente $= m$, das dritte $= b$, so ist die Proportion

$a : ma = b : mb$ (§. 66. *Arithm.*)

$$\frac{b}{mab} = \frac{a}{mab}$$

Lehr-

Lehrsatz.

Wenn drey Grössen einander geometrisch proportional sind, so ist das Product der beyden äussersten dem Quadrate der mittleren gleich: sind aber vier einander proportional, so ist das Product der äussersten dem Producte der beyden mittleren gleich.

Anmerckung.

138. Von den Zahlen ist dieses schon in der Rechenkunst erwiesen worden (§. 109. 110. *Arithm.*). Wir haben aber in der Geometrie solches mit Recht auch auf die Linien, Flächen und Cörper gedeutet, indem man alle Grössen als undeterminirte Zahlen ansehen kan (§. 9.); welches nun durch gegenwärtige algebraische Rechnung noch mehr gerechtfertiget wird.

Die 46. Aufgabe.

139. **Drey geometrische Proportionalgrössen zu finden, aus dem gegebenen Producte des Quadrates der dritten in die erste, und dem Exponenten.**

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die erste Grösse $= x$

der Exponente $= m$ so ist die andere $= mx$

die dritte $= m^2x$

Folgends $a = m^4x^3$

$a : m^4 = x^3$

$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$

Es sey $a = 648$, $m = 3$, so ist $x = \sqrt[3]{(648 : 81.)} = \sqrt[3]{8} = 2$, folgends $mx = 6$, $m^2x = 18$.

Probe: Denn $2.18 = 6.6 = 36$ (§. 137.).

Die 47. Aufgabe.

140. Aus der gegebenen Summe des ersten und vierten Gliedes in einer geometrischen Proportion, ingleichen der Summe des andern, und drittens, und dem Exponenten, jedes Glied insbesondere zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$ das erste Glied $= x$

die andere $= b$ so ist das II $= mx$

der Exponente $= m$. das III $= b - mx$

das IV $= a - x$

Folgends

$x : mx = b - mx : a - x$

daher $ax - x^2 = mbx - m^2x^2$ (§. 137.)

$a - x = mb - m^2x$

$m^2x - x = mb - a$

$m^2 - 1$ div.

$x = (mb - a) : (m^2 - 1)$

Es sey $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$, so ist $x = \frac{22 - 13}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$ und $mx = 6$, folgends

sind

sind die vier Proportionalzahlen 3 : 6 = 5 : 10.

Probe: Denn 3.10 = 5.6 = 30 (§. 137.).

Die 48. Aufgabe.

141. Aus der gegebenen Summe des ersten und letzten Gliedes und dem Exponenten in einer geometrischen Proportion von 3 Gliedern, die Glieder selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe = a das erste Glied = x
der Exponent = m das andere = mx
das dritte = m^2x

Folgends $a = m^2x + x$ (§. 137.)
$m^2 + 1$ *div.*
$a : (m^2 + 1) = x$

Es sey $a = 50$, $m = 2$, so ist $x = 50 : (4 + 1) = 50 : 5 = 10$, $mx = 20$, $m^2x = 40$.

Probe: Denn 10.40 = 20.20 = 400 (§. 137.).

Die 49. Aufgabe.

142. Zu finden auf wie vielerley Art die Glieder einer geometrischen Proportion versetzet werden können, damit sie einander proportional verbleiben.

Auflösung.

Versetzet sie auf alle mögliche Weise, und vergleichet ihre Summen, Unterschiede u. s. w. mit ihnen untereinander: so werdet ihr bald sehen, in welchen Fällen eine Proportion blei-

bet, wenn ihr nur acht gebet, ob in beyden Verhältnissen, die mit einander verglichen werden, einerley Exponente ist (§. 65. *Arithm.*).

Es sey demnach $a : ma = b : mb$

so ist 1. (*alternatim*) $a : b = ma : mb$

2. (*inverse*) $ma : a = mb : b$

3. (*conversim*) $a + ma : a = b + mb : b$

4. (*compositè*) $a + ma : ma = b + mb : mb$

5. (*divisim*) $ma - a : a = mb - b : b$

$ma - a : ma = mb - b : mb$

Ferner oder überhaupt Ingleichen

6. $a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2$

$a^n : m^na^n = b^n : m^nb^n$

7. $a : mac = b : mbc$

8. $a : ma = b : mb$

$\frac{}{c} \quad \frac{}{c}$

9. $ac : ma = bc : mb$

10. $a : ma = b : mb$

$\frac{}{c} \quad \frac{}{c}$

11. $ac : mac = b : mb$

12. $a : ma = b : mb$

$\frac{}{c} \quad \frac{}{c}$

13. $ac : mac = bd : mbd$

14. $a : ma = b : mb$

$\frac{}{c} \quad \frac{}{c} \quad \frac{}{d} \quad \frac{}{d}$

15. $ac : mad = bc : mbd$

16. $a : ma = b : mb$

$\frac{}{c} \quad \frac{}{d} \quad \frac{}{c} \quad \frac{}{d}$

Es sey *ordinate* $a:ma=b:mb$
und $ma:mna=mb:mnb$
so ist 17. *ex æquo* $a:mna=b:mnb$
es sey *perturbate* $a:ma=b:mb$
und $ma:mna=b:b$
n
so ist 18. *ex æquo* $a:mna=\frac{b}{n}:mb$
n

Anmerckung.

143. Hier habet ihr ohne Mühe 18 sehr nützliche Lehrsätze gefunden, die ihr euch wohl bekannt machen müsset, wenn ihr ins künftige entweder die mathematischen Schriften zu lesen, oder auch durch eigenes Nachsinnen mathematische Wahrheiten heraus zu bringen gedencket. Denn die geometrische Proportion ist die Seele der mathematischen Wissenschaften. Der Beweiß beruhet darauf, weil überall einerley Exponente für eine angegebene Proportion heraus kommt, als im 3. Lehrsatz ist $a \dot{+} ma = 1 + m$ und $b \dot{+} mb =$
a b
$1 + m$; im siebenten $\frac{a}{mac} = \frac{1}{mc}$ und $\frac{b}{mbc} = \frac{1}{mc}$;
im siebenzehenten $\frac{a}{mna} = \frac{1}{mn}$ und $\frac{b}{mnb} = \frac{1}{mn}$.

Ich halte es aber für unnöthig die gefundenen Lehrsätze mit Wörtern auszudrucken, weil ein jeder das für sich selbst thun kan, wenn er Lust darzu hat. Z. E. Der 1. Lehrsatz lautet also: Wenn vier Grössen proportional sind, so verhält

sich auch die erste zu der dritten, wie die andere zu der vierten. Der 11. wird so gegeben: Wenn ihr in einer geometrischen Proportion das erste und andere Glied durch eine Grösse multipliciret; so bleiben auch die veränderten Grössen den vorigen proportional.

Die 50. Aufgabe.

144 Zu finden, wie zwey Grössen verändert werden können, daß doch ihre erste Verhältniß gegen einander unverändert bleibet.

Auflösung.

Es seyn zwey Grössen a und ma, die sich gegen einander verhalten wie 1 zu m; so ist:

I. $a : ma$

$c \quad c$

$ac : mac = a : ma$

$= 1 : m$

II. $a : ma$

$c \quad c$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma = 1 : m$

III. $a : ma$
$b : mb$

$a - b : ma - mb = a : ma = b : mb = 1 : m$

IV. $a : ma$
$b : mb$

$a + b : ma + mb = a : ma = b : mb = 1 : m$

Lehr-

Lehrsatz.

1. Wenn ihr zwey Grössen durch eine dritte multipliciret, so verhalten sich die Producte gegen einander, wie die multiplicirten Grössen. 2. Wenn ihr zwey Grössen durch eine dritte dividiret, so verhalten sich die Quotienten wie dieselben Grössen. 3. Wenn sich die weggenommenen Theile gegen einander verhalten wie die ganzen Grössen, so verhalten sich auch die übrigen Theile wie die ganzen Grössen 4. Wenn die hinzu gesetzten Grössen sich verhalten wie die Grössen, zu denen sie addiret werden, so haben auch die Summen eben selbige Verhältniß.

Und dieses letztere gehet an, auch wenn vieler Proportionalgrössen Förder- und Hinterglieder zu einander addiret werden. Z. E. Es sey $a:m=b:mb=c:mc=d:md=e:me$ &c. so ist $a+b+c+d+e$ &c. $: ma+mb+mc+md+me$ &c. $= a:ma = 1:m$.

Die 51. Aufgabe.

145. Die Grösse des Products der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Progreßion zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, der Exponente oder Nahme der Verhältniß $= m$, so ist die Progreßion.

$$a.ma.m^2a\ m^3a.m^4a.m^5a.m^6a.$$
$$\frac{m^5a \quad m^3a \quad m^2a \quad a}{m^6a^2 = m^6a^2 = m^6a^2 = m^6a^2}$$

Lehrsatz.

In einer geometrischen Progreßion ist das Product der beyden äussersten Glieder dem Producte zweyer von den mittleren gleich, die von den äussersten gleich weit abstehen, und dem Quadrate des mittleren, wenn sie an der Zahl ungleich sind. Und das letzte Glied in einer geometrischen Progreßion ist gleich dem Producte aus dem ersten Gliede in die Dignität des Exponenten, deren Grad um 1 weniger ist als die Zahl der Ordnung.

Die 52. Aufgabe.

146. Die Grösse des Quotienten zu determiniren, der heraus kommt, wenn der Unterschied der beyden äussersten Glieder durch den um 1 verringerten Exponenten dividiret wird.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, der Exponente $= m$, die Zahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$, der Unterschied des ersten und letzten $m^{n-1}a - a$. Dividiret denselben durch $m - 1$, so kommt heraus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ u. s. w. Wenn demnach n eine

deter-

determinirte Zahl ist, z. E. 7, so ist $n-7=0$ und demnach $m^{n-7}=m^0=1$, folgends $m^{n-7}a=a$. Solchergestalt ist der Quotient die Summe aller Glieder weniger das letzte.

$$m-1)\ m^{n-1}a-a\ \left\{\begin{array}{l} m^{n-2}a+m^{n-3}a+ \\ m^{n-4}a+m^{n-5}a \end{array}\right.$$
$$m^{n-1}a-m^{n-2}a \qquad + m^{n-6}a \text{ \&c.}$$
$$+m^{n-2}a-a$$
$$+m^{n-2}a-m^{n-3}a$$
$$+m^{n-3}a-a$$
$$m^{n-3}a-m^{n-4}a$$
$$+m^{n-4}a-a$$
$$m^{n-4}a-m^{n-5}a$$
$$+m^{n-5}a-a$$
$$m^{n-5}a-m^{n-6}a$$
$$+m^{n-6}a-a$$
$$\text{\&c.}$$

Zusatz.

147. Wenn ihr demnach den Unterschied des ersten und letzten Gliedes in einer geometrischen Progreßion durch den um 1. verringerten Exponenten dividiret, und zu dem Quotienten das letzte Glied addiret; so habt ihr die Summe der gantzen Progreßion. Es sey das erste Glied a, der Exponente m, die Zahl der Glieder n, so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$. Und demnach die Summe der

Progreßion $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1)$, das ist, wenn $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, $128 + 127 : 1 = 255$. Wenn ihr alles zu einer Benennung bringet, so ist die Summe $(m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m - 1) = (m^n a - a) : (m - 1)$.

Die 35. Aufgabe.

148. Aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede, mit der Zahl der Glieder in einer geometrischen Progreßion, den Exponenten zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ der Exponente $= x$

das letzte $= b$

die Zahl der Glieder $= n$

So ist $b = x^{n-1}a$ (§. 145.)

$$b : a = x^{n-1}$$

$$b^1 : (n-1) : a^1 : (n-1) = x$$

Es sey $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$, so ist $x = \sqrt[5]{486} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{243} = 3$.

Probe; Den $3^5 . 2 = 243 . 2 = 486$.

Die 54. Aufgabe.

149. Aus dem gegebenen Exponenten, der Zahl der Glieder und der Summe

der

der geometrischen Progreßion; das erste Glied zu finden.

Auflösung.

Es sey der Exponente $= m$ das erste Glied $= x$

die Zahl der Glieder $= n$ So ist das letzte $= mx^{n-1}x$

die Summe $= c$ (§. 145.)

Folgends.

$$c = (m^n x - x) : (m - 1)$$

$$\frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad m - 1$$

$$mc - c = m^n x - x$$

$$\frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad m^n - 1)$$

$$(m - 1)c : (m^n - 1) = x$$

Es sey $m = 3, n = 6, c = 728$, so ist $x = 2$.

$728 : 728 = 2$.

Probe: Denn $(486 - 2) : 2 + 486 = 243$

$- 1 + 486 = 242 + 486 = 728$.

Die 55. Aufgabe.

150. Aus dem ersten und letzten Gliede, und dem Exponenten; die Zahl der Glieder in einer geometrischen Progreßion zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$

das letzte $= b$

der Exponente $= m$

So ist $m^{x-1}a=b$, das ist, wenn ihr den Logarithmum von $a=la$ und den Logarithmum von $m=lm$ setzet,

$$xlm-lm+la=lb \text{ (§. 23. } Trig.\text{)}$$

$$xlm=lb-la+lm$$

$$x=\frac{lb-la+1}{lm}lm$$

Es sey $a=2$, $b=486$, $m=3$, so ist

$lb=2.6866363$

$la=0.3010300$

$lb-la=2.3856063$

$3\ x\ x$

$lb-la=2\,3\,8\,5\,6\,0\,6\,3\}5$

$lm=\ 4\,7\,7\,1\,2\,1\,3\}1$

$6=x$

Probe: Denn $2.243=486$ (§. 145.).

Die 56. Aufgabe.

151. Eine unendliche Zahl Brüche zu summiren, deren Zehler Eins ist, die Nenner aber in einer geometrischen Verhältniß fortgehen.

Auflösung.

Es sey der Nenner des ersten Bruches $=a$, der Exponente $=m$. Weil die Brüche unendlich abnehmen, so muß der letzte so klein wer-

werden, daß er in Ansehung des ersten für nichts zu halten. Und also ist die Differentz des ersten und letzten Gliedes dem ersten gleich, das ist, $1:a$, folgends die Summe $1:a + 1:(ma-a) = (m-1+1):(ma-a) = m:(m-1)a$.

Es sey $m=2$, so ist die Summe der Brüche $=2:a$, folgends $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ u. s. w. unendlich fort $=1$.

Es sey $m=3$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $=3:2a$, folgends $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ u. s. w. unendlich fort $=3:6=\frac{1}{2}$.

Es sey $m=4$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $=4:3a$, folgends $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$ u. s. w. unendlich fort $=4:12=\frac{1}{3}$.

Die 57. Aufgabe.

152. Die Summe unendlicher Brüche zu finden, deren gemeiner Zehler einer gegebenen Zahl gleich ist, die Nenner aber in einer geometrischen Progreßion fortgehen.

Auflösung.

Es sey der gemeine Zehler $=b$, der Exponente der Nenner in der Progreßion $=m$, der Nenner des ersten Bruches $=a$, so ist der erste Bruch $=\frac{b}{a}$. Weil nun der letzte Bruch aus der unendlichen Progreßion in Ansehung des ersten nichts ist, so ist der Unter-

terschied dieser beyden $\frac{b}{a}$ folgends die Summe

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{ma-a} = \frac{bm-b+b}{ma-a} : = \frac{bm.}{(m-1)a.}$$

Es sey $m=2$, $a=6$, $b=3$, so ist die Summe der Progreßion $=6:6=1$, das ist, $\frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \frac{3}{24}$ u. s. w. unendlich fort.

Eben so findet ihr, daß $\frac{5}{7} + \frac{5}{21} + \frac{5}{63}$ u. s. w. unendlich fort $=15:14=1\frac{1}{14}$.

Ingleichen findet ihr, daß $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$ &c. $= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Anmerckung.

153. Diese Aufgaben gehören in die Arithmeticam infinitorum, die *Johannes Wallisius* zuerst erfunden, und *Ismael Bullialdus* weiter ausgeführet: ich aber in meinen Elementis Analyseos Infinitorum zwar kurtz, jedoch viel allgemeiner als beyde abgehandelt. Allein weil man dieselbe nicht mehr sonderlich nöthig hat, nachdem der Herr von Leibnitz seine Differential- und Integralrechnung bekant gemacht; wollen wir uns auch mit derselben nicht aufhalten.

Die 12. Erklärung.

154. Drey oder vier Grössen sind harmonisch proportional, wenn im ersten Falle der Unterschied der ersten und der andern sich verhält zu dem Unterschiede der andern und dritten, wie die erste zu der dritten; im andern Falle aber wie der Unterschied der ersten und andern zu dem Unterschiede der dritten und vierten wie die erste zu der vierten. Dergleis

gleichen Zahlen sind 2, 3 und 6, denn 1:3=2:6.

Die 13. Erklärung.

155. Wenn in dem ersten Falle die Glieder vervielfältiget werden; so entstehet eine harmonische Progreßion.

Die 58. Aufgabe.

156. Zu zwey gegebenen Grössen die dritte harmonische Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$ die dritte $=x$
die andere $=b$

So ist (§. 154.)

$$b-a:x-b=a:x$$

$$ax-ab=bx-ax \quad (§.\ 137.)$$

$$2ax-bx=ab$$

$$2a-b$$

$$ab:(2a-b=x$$

Es sey $a=10$, $b=16$; so ist $x=160:(20-16)=160:4=40$.

Probe: Denn $(16-10):(40-16)=6:24=10:40=1:4$.

Der 1. Zusatz.

157. Wenn $2a=b$; so ist $x=ab:0$, und also $1:0=x:ab$, folgends kan keine harmonische Proportionalgrösse gefunden werden:

wel-

welches vielweniger angehet, wenn b grösser als $2a$.

Der 2. Zusatz.

158. Wenn man die dritte Grösse für die andere nimmt; so kan man auf gleiche Weise die vierte finden, und so weiter fort. Die Glieder einer harmonischen Progreßion

$$a.\ b.\ \frac{ab}{2a-b}\quad \frac{ab}{3a-2b}\quad \frac{ab}{4a-3b}\quad \frac{ab}{5a-4b}$$

$$\frac{ab}{6a-5b}\quad \frac{ab}{7a-6b}\ \&c.$$

Die 59. Aufgabe.

159. Zwischen zwey gegebenen Grössen die mittlere harmonische Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$ die andere $=x$
die dritte $=b$
So ist (§. 154.)

$$x-a:b-x=a:b$$

$$bx-ab=ab-ax \quad (§.\ 137.)$$

$$bx+ax=2ab$$

$$x=2ab:(a+b)$$

Es sey $a=10$, $b=40$ so ist $x=700:50=16$.

Pro-

Probe: Denn (16—10):(40—16)=6:24 =10:40=1:4, wie vorhin (§. 156.).

Die 60. Aufgabe.

160. Zu drey gegebenen Grössen die vierte harmonische Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$ die vierte $=x$
die andere $=b$
die dritte $=c$

So ist (§. 154.)

$b-a:x-c=a:x$

$bx-ax=ax-ac$ (§. 137.)

$ac=2ax-bx$

$2a-b$

$ac:(2a-b)=x$

Es sey $a=6$, $b=8$, $c=12$, so ist $x=72:(12-8)=72:4=18$.

Probe: Denn $(8-6):(18-12)=2:6=6:18=1:3$ (§. 154.).

Anmerckung.

161. Nachdem wir den Nutzen der Algebra in arithmetischen Exempeln gezeiget; so ist es Zeit, daß wir zu geometrischen Aufgaben schreiten.

Die 61. Aufgabe.

162. Aus dem gegebenen Radio des Circuls ED die Seite des in ihm beschriebenen regulären Dreyeckes AB zu finden. Tab. I. Fig. 1.

Auflö-

Auflösung.

Es sey DB die Seite des Sechseckes. Weil DB = BE (§. 135. *Geom.*) und bey F rechte Winkel sind (§. 125. *Geom.*); so ist auch DF = EF (§. 96. *Geom.*). Es sey demnach

DB = a BA = x.
So ist DF = $\frac{1}{2}a$ BF = $\frac{1}{2}x$.
folgends $\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}xx$ (§. 172. *Geom.*)

$$\frac{\text{———————}4}{3aa = xx}$$

$$\sqrt{3aa} = x$$

Tab. I. Fig. 2. Ihr findet demnach x, wenn ihr zwischen $3a$ und a die mittlere Proportionallinie suchet (§. 210. *Geom.*). Besser aber geschiehet es also: Aus A und B machet mit dem Diameter AB einen Durchschnitt in D und ziehet aus dem Mittelpuncte C die Linie CD. Diese ist die Seite des Dreyeckes. Denn da $DB^2 = 4a^2$ und $CB^2 = a^2$, so ist $DC^2 = 3aa$. (§. 172. *Geom.*) folgends $DC = \sqrt{3aa}$. Oder machet AE = a; so ist wegen des rechten Winkels bey E (§. 115. *Geom.*) $EB = \sqrt{3aa}$ (§. 172. *Geom.*).

Der 1. Zusatz.

Tab. I. Fig. 1. 163. Weil $3aa = xx$, so ist $aa : xx = 1 : 3$, das ist, $DE^2 : AB^2 = 1 : 3$.

Der

Der 2. Zusatz.

164. Wenn die Seite des Dreyeckes b gegeben ist, und ihr soltet den Radium des Circuls y finden, welcher um selbiges beschrieben werden kan; so habt ihr $3y^2 = b^2$ und also Tab. I. ist $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, folgends dörfet ihr nur zwischen Fig. 1. der Linie AB (b) und dem dritten Theile derselben ($\frac{1}{3}b$) die mittlere Proportionallinie suchen (§. 210. *Geom.*).

Der 3. Zusatz.

165. Die halbe Seite AB, nemlich BF, ist der Sinus des Bogens BD von 60° (§. 2. *Trig.*) Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe den Sinum von 60° finden (§. 11. *Trigon.* 112. *Arithm.*).

Die 62. Aufgabe.

166. Aus dem gegebenen Radio des Tab. I. Circuls AC die Seite des in ihm beschrie- Fig. 3. benen regulären Achteckes zu finden.

Auflösung.

Es sey $AC = BC = DC = a$, $BD = x$; so ist $AB = \sqrt{2a^2}$ (§. 172. *Geom.*).

$BE = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$ (§. 125. *Geom.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$ (§. 54.).

$EC = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{2}a^2)}$ (§. 172. *Geom.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

$DE = a - \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$, folgends

$$DE^2 = \tfrac{3}{2}a^2 - 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$
$$BE^2 = \tfrac{1}{2}a^2$$

$$DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$ (§. 172. *Geom.*)

$$DB = \sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2})}$$

Zusatz.

167. Die halbe Seite des Achteckes ist der Sinus des Bogens von 22°30′ (§. 2. *Trig.*) diesen könnet ihr demnach durch gegenwärtige Aufgabe finden.

Die 63. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 3. 168. Aus der gegebenen Seite des Achteckes DB den Radium des Circuls AC zu finden, der um dasselbe beschrieben werden kan.

Auflösung.

Es sey $DB = b$, $BC = y$, so ist, vermöge dessen, was bey der vorhergehenden Aufgabe erwiesen worden:

$$b^2 = 2y^2 - 2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2}$$

$$2y\sqrt{\tfrac{1}{2}}y^2 = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$-b^4 = 2y^4 - 4b^2y^2$$

$$-\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2$$

$b^4 \qquad b^4$ (§. 83.)

$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}b^4 = y^2 - b^2$$

$$b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}b^4 = y^2$$

$$\sqrt{(b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}b^4)} = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}}b^2)} = y$$

Eine geometrische Construction hat man zwar nicht nöthig, weil sie aus den Anfangs Gründen der Geometrie leichter zu haben. Doch kan man den Radium y und den Mittelpunct des Circuls aus dem gefundenen Werthe folgendergestalt finden. 1. Theilet die Seite des Achteckes AB in zwey gleiche Theile in D und beschreibet darüber einen halben Circul AFB; so ist $AF = FB = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ (§. 172. *Geom.*). Ziehet aus dem Mittelpuncte D durch F eine gerade Linie DC, welche auf AB perpendicular stehet. 3. Machet $AE = 2AB + 2FB = 2b + 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ und beschreibet über AE Tab. I. Fig. 4.

einen halben Circul; so ist AC $= \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\frac{1}{2}}}$ b^2) oder der verlangte Radius und in C der Mittelpunct des Circuls, der um das Achteck beschrieben wird (§. 420. *Geom.*).

Es ist auch nicht nöthig, daß man AFB und ACE beschreibet, denn man darf nur AD und DF einander gleich machen, BF in BH tragen und mit HA den Perpendicul DC in C durchschneiden, so hat man den Mittelpunct C, daraus durch A und B der verlangte Circul beschrieben wird. Und diese Construction ist so beschaffen, daß man sie in die Anfangs-Gründe der Geometrie eintragen kan.

Die 64. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 5.

169. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des Zehneckes AB zu finden.

Auflösung.

Weil AB $= \frac{1}{10}$ der Peripherie, so ist der Winkel ACB 36°, folgends sind die Winkel CAB und ABC ein jeder 72°. (§. 109. *Geom.*). Machet AD $=$ AC, so ist jeder von den Winkeln ADC und DCA 36° (§. 101. 107. *Geom.*) daher DCB 72°, und demnach BD : BC $=$ BC : BA (§. 183. *Geom.*). Es sey AC $=$ BC $=$ AD $= a$, AB $= x$, so ist BD $= a + x$, und dannenhero vermöge dessen, was erwiesen worden,

$$a+x:a=a:x$$
$$a^2=ax+x^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2=\tfrac{1}{4}a^2 \quad \text{(§. 83.)}$$
$$\tfrac{5}{4}a^2=\tfrac{1}{4}a^2+ax+x^2$$
$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}=\tfrac{1}{2}a+x$$
$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}-\tfrac{1}{2}a=x$$

Richtet auf dem Diameter AB den Radium DC = *a* aus dem Mittelpuncte C perpendicular auf (§. 95. *Geom.*) und theilet CB in zwey gleiche Theile in E (§. 120. *Geom.*), so ist CE = $\frac{1}{2}a$ und folgends DE = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 172. *Geom.*) machet EF = DE, so ist CF = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$. Tab. I. Fig. 6.

Anmerckung.

170. Auf solche Art lehret *Ptolomæus* Almag. lib. 1. die Seite des Zehneckes zu finden.

Die 65. Aufgabe.

171. Aus dem gegebenen Radio des Circuls DC, die Seite des Fünfeckes AB zu finden. Tab. I. Fig. 3.

Auflösung.

Es sey	DC = *a*	AB = *x*
so ist	DB = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$ (§. 169.)	BE = $\frac{1}{2}x$
	EC = $\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$	
	DE = $a-\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$	

Folgends

$$DE^2 = 2a^2 - \tfrac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$$
$$BE^2 = \tfrac{1}{4}x^2$$

also $DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$

es ist auch $DB^2 = \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$

daher $\tfrac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - 2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} = 0$

(§. 31. *Ar.*)

$$\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = 2\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} \quad a$$

$$\tfrac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = 4a^2 - x^2$$

$$x^2 = \tfrac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$= a^2 + \tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

Tab. I. Fig. 3. Demnach $AC^2 = DC^2 + DB^2$, das ist, das Quadrat des regulären Fünfeckes ist gleich dem Quadrate des Sechseckes und Zehneckes, die in einem Circul beschrieben sind, zusammen genommen. Daher weil DC die Seite des Sechseckes, und FC die Seite des Zehneckes (§. 169.); so ist DF die Seite des Fünfeckes.

Anmerckung.

172. *Ptolomæus* lehret abermahls die Seite des Fünfeckes auf solche Art finden.

Zusatz.

173. Die halbe Seite des Fünfeckes ist der Sinus von 36°, die halbe Seite des Zehneckes der Sinus von 18° (§. 2. *Trig.*). Derowegen

wegen könnet ihr aus dem gegebenen Radio des Circuls diese beyden Sinus finden (§. 11. *Trig.*).

Die 66. Aufgabe.

174. Eine gerade Linie AC dergestalt in F zu schneiden, daß die ganze Linie AC sich zu dem grossen Theile CF verhält, wie der grosse Theil CF zu dem kleinen FA, oder daß $CF^2 = AC$ in FA. Tab. I. Fig. 6.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CF = x$, so ist $FA = a - x$, und also

$$x^2 = aa - ax$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \quad (\S.\ 83.)$$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

Setzet $AC = DC = a$ rechtwinklicht zusammen, und machet $CE = \frac{1}{2}a$, so ist $DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 172. *Geom.*). Machet ferner $EF = ED$, so ist die Linie AC in F auf verlangte Art getheilet. Tab. I. Fig. 6.

Anmerckung.

175. Die alten Geometræ nennen dieses lineam media & extrema ratione secare. Man pfleget es auch divinam sectionem zu nennen, weil (wie aus dem Euclide zu sehen) man viel aus dieser Linientheilung demonstriret hat.

Zusatz.

176. Wenn *a* der Radius eines Circuls ist, so ist der grosse Theil von der Linie *x* die Seite des Zehneckes (§. 169.).

Die 67. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 7.

177. Aus der gegebenen Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyeckes AB und seinem Inhalte das Dreyeck ABD zu zeichnen.

Auflösung.

Es sey $AB = a$ der Perpendicul $DC = y$
der Inhalt $= bb$ so ist der Inhalt $= \frac{1}{2}ay$
(§. 156. *Geom.*)
und demnach $\frac{1}{2}ay = bb$

$$y = 2bb : a$$

Beschreibet über $AB = a$ einen halben Circul: richtet in A auf dem Diameter $AE = 2b$ perpendicular auf und ziehet die Linie EB. Machet $AG = \frac{1}{2}AE = b$ und ziehet FG mit EB parallel; so ist $AF = 2bb : a$ (§. 87. *Geom.*). Wenn demnach FD mit dem Diameter AB parallel gezogen wird; so giebt sich der verlangte Triangel ADB.

Die 68. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 8.

178. Aus dem gegebenen Umfange AB + BC + CA eines rechtwinklichten Triangels und seinem Inhalte, die gröste Seite BC zu finden.

Auf-

Auflösung.

Es sey $AB + BC + CA = a$, $BC = x$,
der Inhalt $= bb$ so ist $AC + BA = a - x$
$(AC + BA)^2 = a^2 - 2ax + x^2$
$AC^2 + BA^2 = \quad x^2$ (§. 172. *Geom.*)

$2BA \times AC = a^2 - 2ax$ (§. 93. *Arithm.*)
daher (§. 156. *Geom.*)

$a^2 - 2ax = 4bb$

$a^2 - 4bb = 2ax$

$\frac{1}{2}a - 2bb = x$

a

Suchet zu $AB = a$, $BC = 2b$ und $BD = b$ die vierte Proportionallinie $BE = 2bb : a$ (§. 187. *Geom.*). Beschreibet mit $BF = \frac{1}{2}a$ den Bogen FG; so ist $EG = x$ und ihr könnet den verlangten Triangel nach der vorhergehenden Aufgabe beschreiben. Tab. I. Fig. 9.

Anmerckung.

179. Weil alle Flächen durch das Quadrat ausgemessen werden (§. 147. *Geom.*); so giebt man in geometrischen Aufgaben jederzeit die Fläche durch eine Linie, deren Quadrat ihr gleich ist.

Die 69. Aufgabe.

180. Aus der gegebenen Grundlinie BC und den beyden Winkeln an derselben B und C, die Höhe AD zu finden. Tab. I. Fig. 10.

Auflösung.

Es sey BC = a, AD = x. Weil bey D rechte Winkel sind, so wisset ihr auch die Winkel BAD und DAC (§. 102. *Geom.*). Es sey der Sinus des Winkels ABD = t, der Sinus des Winkels BAD = r, der Sinus des Winkels DAC = q, der Sinus des Winkels ACD = p, so ist $t : r = x$: BD und $p : q = x$: DC, (§. 43. *Trig.*) folgends $BD = rx : t$ und $DC = qx : p$. Derowegen weil BD + DC = BC, so habet ihr

$$rx + qx = a$$

$$\frac{}{t} \quad \frac{}{p}$$

$$\frac{}{}\frac{}{}pt$$

$$prx + tqx = apt$$

$$\frac{}{}\frac{}{}pr + tq$$

$$x = apt : (pr + tq).$$

Anders.

Wenn ihr AD als den Sinum totum ansehet, so ist BD der Tangens des Winkels BAD, und DC der Tangens des Winkels DAC (§. 6. *Trigon.*). Es sey der Sinus Totus = t, die Tangentes seyn m und n, so ist $t : m = x$: BD und $t : n = x$: DC, folgends ist $BD = mx : t$, und $DC = nx : t$ und demnach

$$a = (nx + mx) : t$$

$$\frac{}{}\frac{}{}$$

$$at = nx + mx$$

$$\frac{}{}\frac{}{}n + m$$

$$at : (n + m) = x$$

Suchet also zu der Summe der Tangentium

der

der beyden Winkel BAD und DAC dem Sinu toto und der Grundlinie BC die vierte Proportionalzahl (§. 113. *Arithm.*); so kommt die Höhe des Triangels AD heraus.

Die 70. Aufgabe.

181. Aus drey gegebenen Seiten eines Triangels AB, AC und CB die Höhe AD zu finden. Tab. I. Fig. 10.

Auflösung.

Es sey $AB = a$
$BC = b$
$AC = c$
$BD = x$
so ist $DC = b - x$

Weil nun $AB^2 - BD^2 = AD^2$ und $AC^2 - DC^2 = AD^2$ (§. 172. *Geom.*), so ist auch $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$, folgends

$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2bx$$
$$a^2 - c^2 + \tfrac{1}{2}b = x$$
$$2b$$

Folgends $(a^2 - c^2) : 2b = (a + c)(a - c) : 2b$ der halbe Unterschied der Theile CD und BD (§. 61.).

Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel ACB aus dem Scheitelpuncte A auf die Grundlinie CB ein Perpendicul AD gefället wird; so verhält sich die Grundlinie BC zu den beyden Schenkeln AB und AC zusammen genom-

genommen, wie der Unterschied derselben zu dem Unterschiede der Theile von der Grundlinie BD und CD.

Wenn ihr BD habt, so könnt ihr (§. 172. *Geom.*) AD finden.

Es sey $a=6$, $b=4$, $c=3$, so ist $x=(36-9):8+2=27:8+2=5+\frac{3}{8}$ oder $=(9.3):8+2=27:8+2=3\frac{3}{8}+2=5\frac{3}{8}$.

$AB^2=2.3.0.4:64$

$BD^2=1\,8\,4\,9:64$

$AD^2=\;4\,5\,5:64$ (§. 172. *Geom.*)

4|55|00|00 $\left.\right\}$ $21\frac{33}{100}$ demnach ist

4|

|55|

|41| $AD=2133:800$.

|14.|0.0|

| 4|23|

|12|69|

| 1|3.1.|0.0

| |42|63

| 1|27|89

| | 3|11

An-

Anmerckung.

182. Auf eine gleiche Weise könnet ihr aus drey gegebenen Seiten die Höhe des Triangels finden, wenn er stumpfwinklicht ist.

Zusatz.

183. Derowegen könnet ihr auch aus drey gegebenen Seiten den Inhalt eines Triangels finden (§. 156. *Geom.*).

Die 71. Aufgabe.

184. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwinklichten Triangels ABC dessen drey Seiten BA, AC, CB in einer geometrischen Progreßion sind, die Seiten selbst zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= a^2$ AB $= y$

CA $= x$

so ist BC $= x^2$ (§. 113. *Arithm.*)

y

und demnach

$x^4 : y^2 = x^2 + y^2$ (§. 172. *Ge.*) $xy = 2a^2$ (§. 156. *Ge.*)

y^2 y

$x^4 = x^2y^2 + y^4$ $x = 2a^2 : y$

$x^4 - x^2y^2 = y^4$ $x^2 = 4a^4 : y^2$

$x^4 = 16a^8 : y^4$

ingleichen $y = 2a^2 : x$

$y^2 = 4a^4 : x^2$

$y^4 = 16a^8 : x^4$

Hier-

Hieraus nun wird gefunden

$\frac{16a^8}{y^4} - 4a^4 = y^4$ $\quad x^4 - 4a^4 = \frac{16a^8}{x^4}$

$16a^8 - 4a^4y^4 = y^8$ $\quad x^8 - 4a^4x^4 = 16a^8$

$16a^8 = y^8 + 4a^4y^4$ $\quad 4a^8 \quad 4a^8$

$20a^8 = y^8 + 4a^4y^4 + 4a^8$ $\quad x^8 - 4a^4x^4 + 4a^8 = 20a^8$

$2a^4\sqrt{5} = y^4 + 2a^4$ $\quad x^4 - 2a^4 = 2a^4\sqrt{5}$

$a^4(2\sqrt{5} - 2) = y^4$ $\quad x^4 = a^4(2 + 2\sqrt{5})$

$a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)} = y$ $\quad x = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$

Tab. I. Fig. 11. Richtet auf AB $= a$ eine Perpendicularlinie CA $= 2a$ auf; so ist BC $= \sqrt{5aa}$. Machet DB $=$ AB $= a$; so ist DC $= \sqrt{5aa} - a$. Traget DC aus C in E, und aus E in K die Linie CA $=$ $2a$, und beschreibet so wohl über AE als AK einen halben Circul. Ziehet durch C mit AB die Linie FL parallel; so ist FC $= \sqrt{(2a\sqrt{5aa} - 2aa)}$ und CL $= \sqrt{(2aa + 2a\sqrt{5aa})}$, oder FC $= \sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a^2)} = a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$ und CL $= a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Theilet CA in zwey gleiche Theile in H, daß CH $= a$, und machet CG $=$ CF und CM $=$ CL. Beschreibet sowohl über HG, als HM einen halben Circul; so ist CI $= \sqrt{(aa\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)})}$ $= a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)} = y$, und CN $= \sqrt{(a^2\sqrt{(2 + 2$

$(2+2\sqrt{5}))^{\frac{1}{4}} = a\sqrt{(2+2\sqrt{5})} = x.$

Derowegen, wenn ihr CO = CN machet und die Linie IO ziehet; so ist ICO der verlangte Triangel.

Die 72. Aufgabe.

185. Aus der gegebenen Summe der Seiten AC + AB in einem rechtwinklichten Triangel CAB, und dem Perpendicul AD die Seiten zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey $AB + AC = a$, $CA - BA = y$, $BC = x$, $AD = b$; so ist $AC = \frac{1}{2}(a+y)$, $AB = \frac{1}{2}(a-y)$ (§. 61. §. 172. *Geom.* und §. 183. *Geom.*).

folgends

$x^2 = \frac{1}{2}(aa+yy)$

$2x^2 = aa+yy$

$2x^2 - a^2 = y^2$

$BA : DA = BC : AC$

$\frac{1}{2}(a-y) : b = x : \frac{1}{2}(a+y)$

$\frac{1}{4}(aa-yy) = bx$

$aa - 4bx = yy$

Derowegen $2x^2 - aa = aa - 4bx$

$x^2 + 2bx = aa$

$x^2 + 2bx + bb = aa + bb$ (§. 83.).

$x = \sqrt{(aa+bb)} - b$

Auf

Tab. I. Fig. 12. Auf der gegebenen Linie CD = *a* beschreibet ein Rectangulum CDFG, dessen Höhe DF der Höhe des Triangels *b* gleich ist: so ist CF = $\sqrt{(a^2+b^2)}$. Machet FE = FD und CB = CE: so ist CB = $\sqrt{(a^2+b^2)}-b$. Beschreibet demnach über CB einen halben Circul, und ziehet die Linien AB und AC; so ist CAB der verlangte Triangel.

Die 73. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 13. 186. Aus dem gegebenen Sinu eines Winkels den Sinum des doppelten, dreyfachen, vierfachen ꝛc. Winkels zu finden.

Auflösung.

Es sey der einfache Winkel LAM. Nehmet AB für den Sinum Totum an, und machet AB = BC = DC = DE = EK, so ist BF der Sinus des Winkels A (§. 3. *Trigon.*) und AF = FC (§. 107. *Geom.*) der Cosinus (§. 7. *Trigon.*) ferner DBC = 2BAC (§. 101. 107. *Geom.*), DCE = CDA + CAD (§. *cit.*) = 3CAD, KDE = DEA + KAE (§. *cit.*) = 4KAE u. s. w. Weil nemlich CDA = CBD (§. 107. *Geom.*) = 2 BAC, wie erwiesen worden, und DEA = DCE (§. 107. *Geom.*) = 3 KAE, wie gleichfalls erwiesen worden. Folgends ist GC der Sinus des doppelten, DH des dreyfachen, EI des vierfachen Winkels A (§. 3. *Trigon.*); hingegen BG der Cosinus des doppelten, CH des dreyfachen, CD des vierfachen Winkels (§. 7. *Trigon.*).

Es sey $AB = r$, $BF = b$, $AF = c$
so ist $AB : BF = AC : GC$ (§. 183. *Geom.*)
$r : b = 2c : 2bc : r$
$AB : AF = AC : AG$ (§. *cit.*)
$r : c = 2c : 2cc : r$

Derowegen ist $BG = DG = 2cc : r - r = (2cc - rr) : r = [\text{weil } r^2 = b^2 + c^2] (2cc - b^2 - c^2) : r = (c^2 - b^2) : r$, folgends $AD = AG + GD = (3c^2 - b^2) : r$

Es ist ferner (§. 184. *Geom.*)
$AB : BF = AD : DH$
$r : b = 3c^2 - b^2 : 3bc^2 - b^3$
$\frac{}{r} \quad \frac{}{r^2}$

$AB : AF = AD : AH$
$r : c = 3c^2 - b^2 : 3c^3 - b^2c$
$\frac{}{r} \quad \frac{}{r^2}$

Derowegen ist $CH = HE = AH - AC = (3c^2 - b^2c) : r^2 - 2c = (3c^3 - b^2c - 2cr^2) : r^2 = [\text{weil } r^2 = c^2 + b^2] (3c^3 - b^2c - 2c^3 - 2b^2c) : r^2 = (c^3 - 3b^2c) : r^2$, folgends $AE = EH + HA$ $(3c^3 - b^2c + c^3 - 3b^2c) : r^2 = (4c^3 - 4b^2c) : r^2$.

Es ist weiter (§. 183. *Geom.*)
$AB : BF = AE : EI$
$r : b = 4c^3 - 4b^2c : 4bc^3 - 4b^3c$
$\frac{}{r^2} \quad \frac{}{r^3}$

$AB : AF = AE : AI$
$r : c = 4c^3 - 4b^2c : 4c^4 - 4b^2c^2$
$\frac{}{r^2} \quad \frac{}{r^3}$

Derowegen ist $DI = AI - AD (4c^4 - 4b^2c^2 : r^3 - (3c^2 - b^2) : r = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3c^2r^2 + b^2r^2) : r^3 = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3b^2c^2 - 3c^4 + b^4 + b^2c^2) : r^3 = (c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$, weil nemlich $r^2 = b^2 + c^2$.

Wenn demnach der Sinus totus r, der Sinus des einfachen Winkels b, und sein Cosinus c ist, so ist der Sinus

des zwiefachen $2bc : r$
des dreyfachen $(3bc^2 - b^3) : r^2$
des vierfachen $(4bc^3 - 4b^3c) : r^3$
des fünffachen $(5bc^4 - 10b^3c^2 + b^5) : r^4$
des sechsfachen $(6bc^5 - 20b^3c^3 + 6b^5c) : r^5$

Hingegen der Sinus Complementi oder Cosinus

des zwiefachen $(cc - bb) : r$
des dreyfachen $(c^3 - 3b^2c) : r^2$
des vierfachen $(c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$
des fünffachen $(c^5 - 10b^2c^3 + 5b^4c) : r^4$
des sechsfachen $(c^6 - 15b^2c^4 + 15b^4c^2 - b^6) : r^5$

Wenn ihr diese Formuln gegen das Potentztentäfelein (§. 91.) haltet, so werdet ihr wahrnehmen, daß die Glieder vor die Sinus aus den geraden, vor die Cosinus aber aus den ungeraden Stellen der Potentzen genommen werden, nur daß das Mehr- und Minderzeichen beständig abwechselt. Wollet ihr demnach allgemeine Formuln haben; so dörfet ihr sie nur aus der allgemeinen Formul für die Potentzen ausschreiben. Nemlich der Sinus des vielfachen Bogens ist

$$\frac{mc^{m-1}b}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1.m-2.c^{m-3}b^3}{1.\ 2.\ 3.\ r^{m-1}} + \frac{m.m-1.}{1.\ 2.}$$

$$\frac{m-2.m-3.m-4.c^{m-5}b^5}{3.\ 4.\ 5.\ r^{m-1}}$$ &c. Hingegen sein Cosinus ist

$$\frac{c^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1c^{m-2}b^2}{1.\ 2.r^{m-1}} + \frac{m.m-1.}{1.\ 2.}$$

$$\frac{m-2.m-3c^{m-4}b^4}{3.\ 4.\ r^{m-1}} = \text{&c.}$$

Zusatz.

187. Weil der Tangens des einfachen Winkels $t = br : c$ und also $c = br : t$ (§. 18. *Trig.*) und (§. *cit.*) wenn der Tangens des zwiefachen v ist

$$\frac{c^2 - b^2}{r} : \frac{2bc}{r} = r : v$$

das ist $c^2 - b^2 : 2bc = r : v$

oder $\frac{b^2r^2 - b^2}{t^2} : \frac{2b^2r}{t} = r : v$

so ist $r^2 - t^2 : 2tr = r : v$

und $v = \frac{2tr^2}{r^2 - t^2}$

Anmerckung.

188. Auf eben diese Art könnet ihr die Tangentes der übrigen vielfachen Winkel, ja auch eine allgemeine Formul für alle Tangentes der vielfachen Winkel finden. Ihr könnet aber auch die Tangentes suchen, ohne daß ihr nöthig habet, die Sinus zu wissen, wie in der folgenden Aufgabe gezeiget wird. Und dazu habet ihr folgenden Satz nöthig.

Tab. II. Fig. 14. Wenn der Winkel CAB durch die Linie EA in zwey gleiche Theile getheilet wird, so verhält sich die eine Seite AB zu dem ihr anliegenden Theile der Grundlinie BE, wie die Seite AC zu dem Theile EC, so an ihr lieget.

Beweiß.

Verlängert BA in D, bis AD = AC und ziehet die Linie CD. Weil der Winkel CAB = ACD + ADC (§. 101. *Geom.*) und ACD = ADC (§. 107. *Geom.*); so ist ACD = $\frac{1}{2}$CAB = CAE, folgends EA mit CD parallel (§. 98. *Geom.*), und daher BA : BE = AD (= AC) : EC (§. 184. *Geom.*). W. Z. E.

Zusatz.

189. Derowegen verhält sich auch BA : AC = BE : EC, folgends BA + AC : AC = BC : EC (§. 142.).

Die 74. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 15. 190. Aus dem Tangente und Secante des einfachen Winkels die Tangentes und Secantes des zweyfachen, dreyfachen, vierfachen ꝛc. zu finden.

Auflösung.

Nehmet AB für den Sinum totum an, so ist BC der Tangens des einfachen Winkels CAB, BD der Tangens des zwiefachen DAB u. s. w.

Es sey AB = a, BC = b, BD = x; so ist CD = $x - b$, CD^2 = $x^2 - 2bx + b^2$, AD^2 = $aa + xx$. Nun ist AB : AD = BC : CD (§. 187.), und

und daher $AB^2 : AD^2 = BC^2 : CD^2$ (§. 142.), Das ist,

$$\frac{a^2 : a^2 + x^2 = b^2 : x^2 - 2bx + b^2}{a^2b^2 + b^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2}$$

$$2a^2bx = a^2x^2 - b^2x^2$$

$$a^2x - b^2x$$

$$2a^2b : (a^2 - b^2) = x$$

Derowegen ist $CD = x - b = 2a^2b : (a^2 - b^2) - b = (2a^2b - a^2b + b^3) : (a^2 - b^2) = (ab + b^3) : (a^2 - b^2)$.

Den Secantem AD findet ihr nun also.

$BC : CD = AB : AD$ (§. 187.).

$$b : \frac{a^2b + b^3}{a^2 - b^2} = a : AD$$

das ist $1 : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = a : AD$

folgends $AD = (a^3 + ab^2) : (a^2 - b^2)$

Oder wenn ihr den Secantem des einfachen Winkels $AC = \sqrt{(a^2 + b^2)} = c$ setzet, so ist $AD = ac^2 : (a^2 - b^2) = ac^2 : (2a^2 - c^2)$.

Auf gleiche Art wird der Tangens des dreyfachen Winkels $BE = (3a^2b - b^3) : (a^2 - 3b^2)$ und der Secans $AE = c^3 : (a^2 - 3b^2)$ gefunden, u. s. w.

Die 75. Aufgabe.

191. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwinklichten Triangels ABC und dem Winkel B die Seiten zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= b^2$ AB $= x$
der Sinus Totus $= r$ so ist:
der Tangens B $= t$, $r : t = x :$ AC (§. 6. *Trig.*
daher AC $= tx : r$

Folgends $tx^2 : 2r = b^2$

$x^2 = (2b^2r : t)$

$x = \sqrt{(2b^2r : t)}$

Tab. II. Fig. 16. Machet in dem gegebenen Winkel EDA die Seite DA $= 2b$ und richtet AE perpendicular auf, so ist zugleich AD $= r$ und AE $= t$. Verlängert EA in G und richtet in D die Perpendicularlinie DG auf; so ist AG $= 2br : t$ (§. 210. *Geom.*). Machet AH $=$ AG und theilet AD in zwey gleiche Theile in I, daß AI $= b$. Werffet über HI einen halben Circul; so ist (§. 210. *Geom.*) AL $= \sqrt{(2b^2r : t)}$. Machet endlich AB $=$ AL und ziehet aus B die Linie BC mit DE parallel; so ist ABC der verlangte Triangel. Denn weil CBA $=$ EDA (§. 97. *Geom.*), so hat der bey A rechtwinklichte Triangel den verlangten Winkel, und da ferner die Seite BA durch die algebraische Rechnung gefunden worden; so ist CAB der verlangte Triangel (§. 81. *Geom.*).

Die 76. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 17. 192. Ob des Renaldini Regel in einem Circul ein jedes reguläres Vieleck zu be-

beschreiben richtig sey oder nicht, zu untersuchen.

Auflösung.

Die Regel des *Renaldini* ist diese: Wenn man über dem Diameter AB einen gleichseitigen Triangel aufrichtet, den Diameter AB aber in so viel gleiche Theile theilet, als die Peripherie soll getheilet werden, und aus F durch den andern Theilungspunct D die Linie FG ziehet; so ist BG die Seite des verlangten Vielecks. Wir wollen durch das Achteck zeigen, daß die Regel unrichtig ist. Denn in andern Fällen verfähret man auf gleiche Weise. Es sey demnach der halbe Diameter CB=1, die halbe Seite des Vierecks EG $=x$, und BG sey die Seite des Achtecks; so ist CD$=\frac{1}{2}$ vermöge der Regel und FC$=\sqrt{3}$ (§. 162.) Weil nun FCB und CEG rechte Winkel sind, und CDF=GDE (§. 61. *Geom*); so ist (§. 183. *Geom*.).

$$FC:CD = EG:DE$$

$$\sqrt{3}:\tfrac{1}{2} = x : \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

Daher ist $CE=\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\frac{x}{2\sqrt{3}}$, folgends

weil $CE^2+EG^2=CG^2$ (§. 172. *Geom*.)

$$\frac{3+2x\sqrt{3}+x^2}{12}+x^2=1$$

$$\frac{\quad\quad\quad\quad}{\quad\quad\quad\quad}12$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$$

$$13x^2 + 2x\sqrt{3} = 9$$

$$x^2 + \tfrac{2}{13}x\sqrt{3} = \tfrac{9}{13}$$

$$x^2 + \tfrac{2}{13}x\sqrt{3} + \tfrac{3}{13}\cdot\tfrac{3}{13} = \tfrac{9}{13} + \tfrac{3}{13}\cdot\tfrac{3}{13} = \tfrac{120}{13\cdot 13}$$

$$\tfrac{1}{13}\sqrt{3} + x = \tfrac{1}{13}\sqrt{120} = \tfrac{2}{13}\sqrt{30}$$ (§. 50.)

$$x = \tfrac{2}{13}\sqrt{30} - \tfrac{1}{13}\sqrt{3}$$

Nun ist aber $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. 16. *Trig.*)

Derowegen erhellet, daß die Regel des *Renaldini* die halbe Seite des Viereckes unrichtig herausbringet, wie noch klärer erhellet, wenn man in zehentheiligen Brüchen sowohl aus dem Renaldinischen als dem wahren Werthe die Wurtzel heraus ziehet.

Die 77. Aufgabe.

193. Einen Circul zu finden, der so groß ist als die Fläche eines gegebenen Cylinders.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Cylinders $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$, so ist die Fläche $= ap$ (§. 221. *Geom.*). Es sey ferner der Diameter des Circuls $= x$, so ist $d : p = x : (px : d)$. Und demnach die Peripherie des Circuls $px : d$, folgends seine Fläche $px^2 : 4d$ (§. 168. *Geom.*). Derowegen ist

px^2

$$\frac{px^2 : 4d = ap}{x^2 = 4ad}$$
$$\frac{}{x = \sqrt{4ad} = 2\sqrt{ad}}$$
oder $\frac{1}{2}x = \sqrt{ad}$

Der halbe Diameter des verlangten Circuls ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Lehrsatz.

Die Fläche des Cylinders ist gleich einem Circul, dessen Radius die mittlere Proportionallinie ist zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Die 78. Aufgabe.

194. Aus der gegebenen Verhältniß der Höhe eines Cylinders zu seinem Diameter, und dem Diameter eines Circuls, der seiner Fläche gleich ist, die Höhe des Cylinders und seinen Diameter zu finden.

Auflösung.

Es sey die gegebene Verhältniß $m:n$, der Diameter des Circuls $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe des Cylinders $= x$; so ist sein Diameter $= nx:m$ und seine Peripherie $= npx:md$, folgends

$$\frac{npx^2 : md = \frac{1}{4}pd}{x^2 = md^2 : 4n}$$
$$\frac{}{x = \sqrt{(md^2 : 4n)}}$$

Tab. II. Fig. 18. Machet AB = n und richtet darauf perpendicular auf BC = m. Machet ferner AD = $\frac{1}{2}d$ und richtet in D die Perpendicularlinie DE auf = $md : 2n$. Machet endlich DF = DE und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist DG = $\sqrt{(md^2 : 4n)}$ (§. 210. *Geom.*).

Die 79. Aufgabe.

195. Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel und der Höhe eines Cylinders, der ihr gleich ist, den Diameter des Cylinders zu finden.

Auflösung.

Es sey die Höhe des Cylinders = a, der Diameter der Kugel = d, ihre Peripherie = p, der Diameter des Cylinders = x; so ist der Inhalt der Kugel = $\frac{1}{6}pd^2$ (§. 237. *Geom.*) die Peripherie des Cylinders $px : d$, sein Inhalt $apx^2 : 4d$ (§. 221. *Geom.*) und demnach

$$\frac{1}{6}pd^2 = apx^2 : 4d$$

$$\frac{4}{6}pd^3 = apx^2 \quad | \cdot 4d$$

$$2d^3 = x^2 \quad | : ap$$

$$\frac{2d^3}{3a} = x^2$$

$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x$$

Tab. II. Fig. 18. Es wird also der Werth von x eben wie in der vorhergehenden Aufgabe gefunden. Nemlich man machet AB = a, BC = $\frac{2}{3}d$ und AD = d; so ist DE = DF = $2d^2 : 3a$ folgends DG = $\sqrt{(2d^3 : 3a)}$.

Die

Die 80. Aufgabe.

196. Aus dem gegebenen Diameter und der Höhe eines Coni, den Diameter eines Cylinders zu finden, der ihm der Höhe und dem Inhalte nach gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $= d$, die Höhe $= a$, der Diameter des Cylinders $= x$, die Verhältniß des Diametri zur Peripherie $= d : p$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12} adp$ (§. 229. *Geom.*), die Peripherie des Cylinders $px : d$, und sein Inhalt $apx^2 : 4d$ (§. 221. *Geom.*), folgends

$$\frac{\frac{1}{12} adp = apx^2 : 4d}{\frac{1}{3} ad^2 p = apx^2}$$
$$\frac{\frac{1}{3} ad^2 p = apx^2}{\frac{1}{3} d^2 = x^2}$$
$$\sqrt{\frac{1}{3} d^2} = x$$

Beschreibet auf dem Diameter des Kegels d einen gleichseitigen Triangel und darum einen Circul; dieser ist viermahl so groß als die Grundfläche des Cylinders (§. 164), folgends wenn um den Radium dieses Circuls ein anderer beschrieben wird; ist derselbe Radius der verlangte Diameter des Cylinders.

Die 81. Aufgabe.

197. Aus dem gegebenen Diameter eines Coni und seiner Höhe, den Diameter

ter einer Kugel zu finden, die ihm gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter der Grundfläche des Coni $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$, der Diameter der Kugel $= x$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12}adp$ (§. 229. *Geom.*) hingegen der Inhalt der Kugel $px^3 : 6d$ (§. 237. *Geom.*). Derowegen ist

$$\frac{\frac{1}{12}adp = px^3 : 6d}{\frac{1}{2}ad^2 = x^2}$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}ad^2} = x$$

Anmerckung.

198. Bisher habe ich in leichten geometrischen Exempeln den Nutzen der Algebra gezeiget: nun aber wird es Zeit seyn, daß ich darthue, wie man in der höheren Geometrie mit sonderbarem Vortheile sich derselben bediene. Es handelt aber die höhere Geometrie von den krummen Linien. Derowegen soll ich zeigen, wie man durch Hülfe der Algebra die Eigenschaften der krummen Linien finden kan. Zwar dienet darzu hauptsächlich die Differential- und Integral-Rechnung, von der im andern Theile gehandelt werden soll: allein man kan auch durch die gemeine Algebra gar viel ausrichten. Damit ihr aber verstehen möget, was hinfort beygebracht werden soll; so muß überhaupt etwas von den krummen Linien angeführet werden. Bildet euch aber nicht ein, als wenn diese Betrachtung gantz fruchtloß wäre. Vielmehr versichert euch, daß sie denenjenigen sehr zu statten kommt, welche die Geheimnisse der Natur

und

und Kunst genauer als andere einzusehen belieben. Ich würde jetzt vergeblich reden, wenn ich einen weitläuftigen Beweiß davon führen wolte. Hier mercket nur überhaupt, daß man gewohnt ist die krummen Linien durch algebraische Gleichungen zu erklären, welche die Relation gewisser geraden Linien, die man innerhalb denselben ziehen kan, gegen einander andeuten. Z. E. Es sey AMP ein halber Circul, und in demselben PM auf dem Diameter AB perpendicular. Setzet $AB = a$, $AP = x$; so ist $BP = a - x$. Es sey ferner $PM = y$; so ist beständig $yy = ax - xx$ (§. 210. *Geom.* & §. 137. *Algebr.*). Derowegen drucket die Gleichung die Relation aus, welche die Linie PM zu AP in allen Puncten der Peripherie AMB hat. Und darum nennet man sie die Erklärung des Circuls. Oder es sey $AC = a$, $PC = x$, $PM = y$; so ist $aa - xx = yy$ (§. 172 *Geom.*). Derowegen drucket diese Gleichung die Relation aus, welche PM und PC in allen Puncten der Peripherie gegeneinander haben. Und also nennet man auch sie eine Erklärung des Circuls. Gleichwie nun aber alles, was von der Sache erkant werden kan, aus ihrer Erklärung hergeleitet wird (§. 2. Meth. Math.); so pfleget man auch aus dergleichen Gleichungen durch die Algebra die Eigenschaften der krummen Linien herzuleiten. Tab. II. Fig. 19.

Von den krummen Linien.

Die 13. Erklärung.

199. Die Linie AX, welche alle gerade Linien MM, die mit einander innerhalb einer krummen Linie parallel gezogen werden, in zwey gleiche Theile PM und PM theilet, wird der Diameter und insonderheit die Axe genennet, wenn sie Tab. II. Fig. 20.

mit

mit eben den Linien einen rechten Winkel machet.

Die 14. Erklärung.

200. Die Linien MM werden die Ordinaten; ihre Helften aber PM die Semiordinaten genennet.

Die 15. Erklärung.

201. Hingegen die Abscisse AP ist das Stücke des Diameters oder der Axe, welches die Ordinaten MM abschneiden.

Die 16. Erklärung.

Tab. II. Fig. 20. 202. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punct A, darinnen sich die Axe oder auch der Diameter AX ender.

Die 17. Erklärung.

203. Eine algebraische Linie wird genennet deren Natur durch eine algebraische Gleichung sich erklären läst.

Die 1. Anmerckung.

204. Durch die algebraische Gleichungen verstehen wir diejenigen, die einerley Grad haben in allen Puncten der krummen Linie. Dergleichen ist die Gleichung des Circuls $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 198.).

Die 2. Anmerckung.

205. Man nennet insgemein mit dem *des Cartes* die algebraischen Linien geometrische Linien: allein wir sind bey der Benennung des Herrn von Leibnitz geblieben, mit welchem auch der grosse Engelländische Geometra *Newton* übereinstimmet, welcher (in Arithm. Univ. p. 280.) wohl erinnert, daß nicht die Gleichung Ursache sey, warum man eine krum-

krumme Linie zu Auflösung der Fragen in die Geometrie nehmen solle, sondern es solle vielmehr darum geschehen, weil sie sich leicht beschreiben läst.

Die 18. Erklärung.

206. Eine trascendentische Linie wird genennet, deren Natur durch keine algebraische Gleichung sich erklären läst.

Anmerckung.

207. Insgemein nennet man die trascendentischen Linien mechanische Linien, abermahls mit dem *des Cartes*, und wirft solchergestalt viel Linien aus der Geometrie, die sich leicht beschreiben lassen: welches wir mit dem Herrn von Leibnitz mit Recht mißbilligen, als welcher eine besondere Art der Gleichungen für diese Linien erfunden, dadurch ihre Eigenschaften sowohl als der algebraischen Linien herausgebracht werden.

Die 19. Erklärung.

208. Alle algebraische Linien werden zu einem Geschlechte gerechnet, da die Glieder der Gleichungen auf gleiche Abmessungen steigen. Da nun die Gleichung für eine gerade Linie allein eine Abmessung haben kan, so nennet man eine Linie von dem ersten Geschlechte, wenn die Glieder der Gleichung zwey Abmessungen haben: sind derselben drey, so ist es eine Linie von dem andern Geschlechte: sind ihrer vier: eine Linie von dem dritten Geschlechte u. s. w.

Anmerckung.

209. Die Gleichung für den Circul ist $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$. Demnach ist der Circul eine Linie von dem ersten Geschlechte. Wie-

derum wenn $ax = y^2$ die Natur einer krummen Linie erkläret; so ist dieselbe abermahls eine von dem ersten Geschlechte. Hingegen wenn die Erklärung der krummen Linie $a^2x = y^3$ ist, so ist sie eine Linie von dem andern Geschlechte.

Die 20. Erklärung.

210. Die algebraischen Linien rechnen wir zu einer Familie, in deren Gleichungen alle Glieder bis auf die Exponenten der Dignitäten mit einander übereinkommen.

Die 1. Anmerckung.

211. Demnach gehören die krummen Linien, deren Natur durch die Gleichungen $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$ erkläret wird, zu einer Familie.

Zusatz.

212. Die krummen Linien können alle unter eine Gleichung gebracht werden, die zu einer Familie gehören, wenn man nemlich für die determinirte Exponenten undeterminirte setzet.

Die 2. Anmerckung.

213. Solchergestalt sind alle krumme Linien, die sich durch $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$ u. s. w. erklären lassen, unter dieser Gleichung enthalten $a^{m-1}x = y^m$ oder, wenn $a = 1$ angenommen wird $x = y^m$.

Die 3. Anmerckung.

214. Solchergestalt könnet ihr alle algebraische Linien für eine grosse Familie rechnen, die aus unendlich kleinern bestehet, deren jede unendliche Geschlechter hat. Denn weil in allen Gleichungen, dadurch

durch die Natur der krummen Linien erkläret wird, entweder eine gewisse Dignität der Abscisse und Ordinate blos durch bekannte Grössen, oder zugleich verschiedene Dignitäten derselben in einander, oder auch für einige Glieder lauter bekante Grössen in einander multipliciret werden, alle Gleichungen aber sich auf o solviren, wenn man alle Glieder auf eine Seite setzet, (als an statt $ax = y^2$ könnet ihr sagen $y^2 - ax = o$); so wird eine General-Gleichung für alle algebraische Linien seyn $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = o$. Man setzet überal das Zeichen +, weil die Zeichen auf gar viel Arten verändert werden können.

Die 4. Anmerckung.

215. Diese Eintheilung der Linien in ihre Geschlechter und Familien hat ihren Nutzen: und dienet die letztere sonderlich dazu, daß wir dasjenige, was vielen Linien gemein ist, auf einmahl erkennen. Die erstere Eintheilung ist zu dem Ende aufgebracht worden, daß man eine Wahl der Linien anstellen könte, wenn man einige zu Auflösung einer Aufgabe aussuchen soll; wovon ich an seinem Orte reden will.

Die 5. Anmerckung.

216. Unter den krummen Linien, sind sonderlich diejenigen für andern berühmt, welche aus geschickter Zerschneidung eines Kegels oder Coni entstehen, und daher von den Alten *Sectiones Conicæ*, oder Kegelschnitte genennet werden. Denn weil sie die Alten nebst dem Circul allein in die Geometrie nahmen; haben sie auch viel von ihren Eigenschaften geschrieben, und die Neueren haben noch ein mehreres dazu gefunden. Derowegen wollen auch wir ihre vornehmsten Eigenschaften durch algebraische Rechnungen untersuchen, und zu dem Ende für ihre Erklärungen algebraische Gleichungen annehmen. Es sind aber dieser Linien drey, nemlich die *Parabola*, die *Ellipsis* und die *Hyperbola*. Mercket hier einmahl für allemahl, daß wir be-

ständig die Abscisse x und die halbe Ordinate y nennen wollen.

Die 21. Erklärung.

217. Die *PARABOLA* ist eine krumme Linie, in welcher $ax = y^2$, das ist, in welcher das Quadrat der halben Ordinate dem Rectangulo aus der Abscisse in eine beständige Linie gleich ist, die der Parameter genennet wird.

Der 1. Zusatz.

218. Derowegen ist in der Parabel $a = y^2 : x$, das ist, der Parameter ist die dritte Proportionallinie zu einer jeden Abscisse und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

Der 2. Zusatz.

219. Es ist ferner $\sqrt{ax} = y$, das ist, die halbe Ordinate ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Parameter und der ihr zugehörigen Abscisse.

Der 3. Zusatz.

Tab. II. Fig. 21.

220. Solchergestalt könnet ihr eine Parabel beschreiben, wenn deren Parameter gegeben wird. Traget nemlich auf die Linie AX den Parameter BA und ziehet durch A die Linie CD auf AX perpendicular. Beschreibet nach Gefallen Circul, die einander in B berühren, und die Linie BX in P, die Linie CD in 1. 2. 3. 4. 5. durchschneiden. Durch P ziehet Linien I. I, II. II, III. III, u. s. w. mit CD parallel, und lasset darauf aus 1. 2. 3. u. s. w. Perpendicularlinien 1. I. 2. II. 3. III. u. s. w. herunter

fallen

fallen, oder welches gleichviel ist, machet PI = A1, PII = A2, PIII = A3 u. s. w.; so sind die Puncte I, II, III. u. s. w. in der Parabel. Denn es sey AB = a, AP = x, A3 = PIII = y; so ist $y^2 = ax$ (§. 210. *Geom.*) und also der Punct III in der Parabel (§. 217.).

Der 4. Zusatz.

221. Ihr könnet auch in einer jeden Parabel einen verlangten Punct geometrisch determiniren. Z. E. Ihr woltet wissen, ob M recht in der Parabel sey. Lasset aus M in P ein Perpendicul fallen, und traget aus P in B den Parameter. Werffet über BA einen halben Circul, wenn er durch den Punct M gehet, so ist er in der Parabel (§. 220. *Geom.* & §. 217. *Algebr.*). Tab. III. Fig. 22.

Der 5. Zusatz.

222. Endlich ist $x = y^2 : a$, das ist, die Abscisse ist die dritte Proportionallinie zu dem Parameter und der halben Ordinate. Daher wenn AB der Parameter ist und BAQN ein Rectangulum; wenn man ferner NM mit BP parallel ziehet, und auf AN die Linie AM perpendicular aufrichtet; so ist der Punct M in der Parabel. Denn in dem bey A rechtwinklichten Triangel NAM ist NQ : QA = QA : QM, das ist, AB : PM = PM : AP, oder $a : y = y : x$. Tab. III. Fig. 23.

Der 6. Zusatz.

223. Die erklärte Parabel (welche man

die Apollonische zu nennen pfleget, weil Apollonius Pergæus unter den Alten gründlich von ihr geschrieben, ist eine Linie von dem ersten Geschlechte (§. 208.).

Der 7. Zusatz.

224. Wenn ihr demnach $a^2x=y^3$, $a^3x=y^4$, $a^4x=y^5$ &c. setzet, so habt ihr Parabeln von dem andern, dritten, vierten ꝛc. Geschlechte. und daher erkläret $a^{m-1}x=y^m$ eine gantze Familie unendlicher Geschlechter der Parabeln. Gleichergestalt wenn ihr $ax^2=y^3$, $ax^3=y^4$, $ax^4=y^5$ &c. setzet; so habt ihr noch andere Arten der Parabeln von dem andern, dritten, vierten ꝛc. Geschlechte, welche alle unter der Gleichung $ax^{m-1}=y^m$ enthalten sind. Beyde Familien gehören unter diese Gleichung nebst unendlich andern Linien $a^n x^m=y^{n+m}$.

Der 8. Zusatz.

Tab. III. Fig. 23.

225. Wenn ihr auf die Sehne AM der Parabel von dem ersten Geschlechte ein Perpendicul AR aufrichtet, welches die Seniordinate PM, wenn sie verlängert wird, in R durchschneidet; so ist der Punct R in der Parabel von dem andern Geschlechte. Denn wegen des rechten Winkels bey A ist PM: AP = AP:PR (§. 210. *Geom.*) und daher $PM^2 : AP^2 = AP^2 : PR^2$, oder $PM^2 : SR^2 = SR^2 : AS^2$ (§. 142.). Wenn ihr demnach AB = a, AP = SR = y und PR = SA = x setzet: so habt ihr $ay : y^2 = y^2 : x^2$, folgends $y^3 = ax^2$.

Die

Die 1. Anmerckung.

226. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem andern Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort gefunden, wie ich in den Actis Eruditorum des 1717ten Jahres gezeiget.

Der 9. Zusatz.

227. Wenn ihr AS dem Parameter gleichmacht, und RS in S perpendicular aufrichtet, dann aus S in R die halbe Ordinate QM traget, und endlich aus A durch R die Linien AN ziehet; so ist N ein Punct in der Parabel von dem andern Geschlechte, in welcher $y^3 = a^2 x$. Tab. III. Fig. 24.

Denn es sey $AQ = y$, $AS = a$; so ist $QM = SR = y^2 : a$, folgends da $AS : SR = AQ : QN$ das ist, $a : \frac{y^2}{a} = y : x$; so findet ihr $a^2 x = y^3$

oder $a^2 . QN = AQ^3$.

Die 2. Anmerckung.

228. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem andern Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort gefunden, wie ich gleichfals in den Actis Eruditorum A. 1717. gezeiget.

Die 22. Erklärung.

229. Der Brennpunct (Focus) ist der Punct in der Axe, wo der Parameter die Ordinate abgiebet.

Die 82. Aufgabe.

230. Die Weite des Brennpunctes F von dem Scheitel A zu finden. Tab. III. Fig. 25.

Auflösung.

Es sey $AF = x$, der Parameter $= a$, so ist $FR = \frac{1}{4}a$ (§. 229.), folgends

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 = ax}{\frac{1}{4}a = x}$$

Tab. III. Fig. 25. **In der Parabel ist die Weite des Brennpuncts F von dem Scheitel A dem vierten Theile des Parameters gleich.**

Die 83. Aufgabe.

231. Die Verhältniß zu finden, welche die Ordinaten gegen einander haben.

Auflösung.

Tab. III. Fig. 22. Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, $Ap = v$, $PM = y$, $pm = z$, so ist $y^2 = ax$, und $z^2 = av$ (§. 217.), folgends $y^2 : z^2 = ax : av = x : v$ (§. 144.). Demnach ist $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$, das ist,

In der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Abscissen.

Die 84. Aufgabe.

232. Die Grösse des Rectanguli aus der Summe zweyer halben Ordinaten $PM + pm$ in ihre Differenz Rm zu finden.

Auflösung.

$$\left.\begin{aligned} pm + PM &= \sqrt{av} + \sqrt{ax} \\ mR &= \sqrt{av} - \sqrt{ax} \end{aligned}\right\} \text{§. 219.}$$

$$(pm + PM)\,mR = av - ax = a(v - x)$$

Das

Das Rectangulum aus der Summe zweyer halben Ordinaten in ihre Differentz ist gleich dem Rectangulo aus dem Parameter in die Differentz der zugehörigen Abscissen.

Zusatz.

233. Derowegen verhält sich der Parameter zu der Summe zweyer halben Ordinaten, wie ihre Differentz zu der Differentz der Abscissen.

Die 85. Aufgabe.

234. Die Verhältniß der Sehnen AM und Am zu finden, welche aus dem Scheitel der Parabel A gegen das Ende der Ordinaten gezogen werden. Tab. III. Fig. 22.

Auflösung.

Weil $PM^2 = ax$, $AP^2 = x^2$; so ist $AM^2 = ax + x^2$ (§. 172. *Geom.*). Wiederum wenn ihr $AP = v$ setzet; so ist $AM^2 = av + v^2$. Derowegen ist

$$AM^2 : Am^2 = ax + x^2 : av + v^2$$
$$= (a + x)x : (a + v)v$$

Die Quadrate der Sehnen AM und Am verhalten sich in der Parabel wie die Rectangula aus den Abscissen in die Aggregate der Abscissen und des Parameters.

Die 86. Aufgabe.

235. Die Grösse der Linie FM zu finden, die Tab. III. Fig. 25.

die aus dem Brennpuncte an das Ende einer Ordinate M gezogen wird.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, so ist $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 230.), $PF = x - \frac{1}{4}a$, folgends

$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$

$PM^2 = \quad ax \qquad$ (§. 217.)

$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$ (§. 172. *Geom.*)

$FM = x + \frac{1}{4}a$.

Die gerade Linie FM, welche aus dem Brennpuncte F einer Parabel gegen das Ende ihrer Ordinate M gezogen wird, ist gleich der Summe aus der Abscisse und der Weite des Brennpunctes von dem Scheitel.

Der 1. Zusatz.

Tab. III. Fig. 25.

236. Wenn ihr den vierten Theil des Parameters aus A in F und in f traget, durch AX so viel Parallellinien MM ziehet, als euch gefället, und aus F mit der Weite Pf die Puncte M beyderseits abschneidet; so könnet ihr abermahls eine Parabel beschreiben.

Der 2. Zusatz.

Tab. III. Fig. 26.

237. Ihr könnet auch dieses durch die Bewegung verrichten. Denn nehmet wie vorhin auf der Axe, $Af = AF = \frac{1}{4}a$. Befestiget in f ein Lineal DC dergestalt, daß es in f mit fX

einen

einen rechten Winkel machet. Nehmet ein Winkelmaaß IGH und befestiget an seinem einen Ende H einen Faden, der ihm gleich ist: das andere Ende aber des Fadens bindet an einen Nagel, den ihr im Brennpuncte F eingeschlagen. Wenn ihr einen Stift an das Winkelmaaß IGH haltet und es an dem Lineale DC verschiebet; so wird sich die Parabel beschreiben. Denn es ist beständig $FM = AP + Af = x + \frac{1}{4}a$, und daher M ein Punct in der Parabel (§. 235.).

Anmerckung.

238. Auf ebenmäßige Art könnet ihr die Eigenschaften der Parabeln von höheren Geschlechtern untersuchen. Wollet ihr aber diejenigen haben, welche allen Parabeln gemein sind, so dörfet ihr nur die allgemeine Gleichung für ihre gantze Familie annehmen. Tab. III. Fig. 22.
Denn weil $a^{m-1}x = y^m$, so ist auch $a^{m-1}v = z^m$, folgends $PM^m : pm^m = AP : Ap$. Wiederum weil

$$PM + pm = \sqrt[m]{a^{m-1}x} + \sqrt[m]{a^{m-1}v},\ mR = \sqrt[m]{a^{m-1}v} - \sqrt[m]{a^{m-1}x^1};$$

so ist $(PM + pm).mR = \sqrt[m]{a^{2m-2}v^2} - \sqrt[m]{a^{2m-2}x^2}$. Weil $FR = \frac{1}{2}a$; so ist $a^m : 2^m = a^{m-1}x$, folgends $x = a : 2^m = AF$. Derowegen kommt in den Parabeln von dem höheren Geschlechte der Brennpunct dem Scheitelpuncte immer näher, wenn sie einen Parameter haben. Tab. III. Fig. 25.

Die 23. Erklärung.

239. Die *ELLIPSIS* ist eine krumme Linie, in welcher sich verhält das Rectan- Tab. III. Fig. 27.

gulum aus den Theilen der Axe AP und PB, zu dem Quadrate ihrer halben Ordinate PM wie die Axe AB zu einer unveränderlichen Linie, die ihr Parameter genennet wird: das ist, wenn ihr AB $= a$, den Parameter $= b$, PM $= y$ und AP $= x$ setzet, in welcher $ay^2 = abx - bx^2$.

Der 1. Zusatz.

240. Derowegen ist $y^2 = bx - bx^2 : a$, das ist, das Quadrat der halben Ordinate ist gleich einem Rectangulo aus der Abscisse in den Parameter, weniger ein Rectangulum aus eben dieser Abscisse in die vierte Proportionallinie zu der Axe, dem Parameter und der Abscisse.

Der 2. Zusatz.

241. Weil $ay^2 = abx - bx^2$, so ist

$$bx^2 : (bx - y^2) = a$$

Demnach könnet ihr in einer Ellipsi aus dem gegebenen Parameter der Abscisse und halben Ordinate die Axe folgendergestalt finden. Suchet zu PE $= b$, PM $=$ PF $= y$ die dritte Proportionallinie PG $= y^2 : b$. Machet AP $= x$ und PH $=$ PG; so ist AH $= x - y^2 : b = (bx - y^2) : b$. Machet ferner AI $=$ AH und AL $=$ AP $= x$, und ziehet LB mit IP parallel, so ist AB $= a$, oder die verlangte Axe.

Tab. III. Fig. 28.

Der

Der 3. Zusatz.

242. Wiederum weil $ayy = abx - bxx$, so ist $b = ayy : (ax - x^2)$, und daher könnet ihr in einer gegebenen Ellipsi den Parameter also finden. Richtet in B die Perpendicularlinie BE auf, und ziehet aus A durch M die Linie AE, so ist $BE = ay : x$ (§. 184. *Geom.*). Machet $BG = PM$, und ziehet die Linie PE, und mit ihr GH parallel; so ist $BH = ay^2 : (ax - x^2) = b$ (§. cit.), das ist der verlangte Parameter. Tab. III. Fig. 29.

Der 4. Zusatz.

243. Weil $yy = (abx - bxx) : a$, so ist $y = \sqrt{(bx - bxx : a)}$. Derowegen wenn euch die Axe und der Parameter gegeben werden, könnet ihr für jede Abscisse ihre gehörige halbe Ordinate folgendergestalt finden. Suchet zu der Axe $AB = a$ dem Parameter $BC = b$ und der Abscisse $AP = x$ die vierte Proportionallinie $PD = bx : a$. Ziehet DE mit AB parallel; so ist $CE = b - bx : a$. Machet $PF = CE$ und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist $PM = \sqrt{(bx - bx^2 : a)} = y$, das ist, die verlangte halbe Ordinate. Tab. III. Fig. 30.

Die 87. Aufgabe.

244. Die Weite des Brennpunctes AF von dem Scheitel A zu finden.

Auf-

Auflösung.

Tab. III. Fig. 27. Es sey AB = a, der Parameter = b, AF = x, so ist FR = $\frac{1}{2}b$ (§. 229.), und

$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bxx$ (§. 240.).

$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$

$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$

$\frac{1}{2}a - x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$

$\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)} = x$

Traget aus B in E $\frac{1}{2}b$; so ist CE = $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Beschreibet über AE einen halben Circul, welcher die in dem Mittelpuncte C aufgerichtete Perpendicularlinie CD in G durchschneidet; so ist GC = $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$. Machet CF = GC; so ist in F der Brennpunct.

Zusatz.

245. Also ist die Weite des Brennpunctes von dem Mittelpuncte C = $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ab)}$, das ist, die mittlere Proportionallinie zwischen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.

Die 24. Erklärung.

Tab. III. Fig. 27. 246. Die Perpendicularlinie DC, welche die grössere Axe AB in zwey gleiche Theile theilet, ist die halbe kleine Axe.

Die

Die 88. Aufgabe.

247. Aus dem gegebenen Parameter und der grossen Axe AB die kleine Axe CD zu finden. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, AB $= a$, CD $= \frac{1}{2}z$, so ist

$$\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}z^2 = a : b \quad (\S.\ 239.).$$

$$z^2 = ab$$

$$z = \sqrt{ab}$$

das ist:

Die kleine Axe in der Ellipsi ist die mittlere Proportionallinie zwischen der grossen und dem Parameter.

Der 1. Zusatz.

248. Derowegen ist der Parameter die dritte Proportionallinie zu der grossen und kleinen Axe.

Der 2. Zusatz.

249. Wenn die Weite des Brennpunctes von dem Scheitel AF $= x$ ist; so ist $ax - xx = \frac{1}{4}ab$ (§. 244.). Derowegen ist das Rectangulum aus der Weite des Brennpunctes von dem Scheitel AF, in ihr Complement zur grossen Axe FB, dem Rectangulo aus der gros- Tab. III. Fig. 27.

grossen Axe in den vierten Theil des Parameters gleich.

Die 89. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 27.

250. Die Verhältniß zu finden, welche die halben Ordinaten PM und pm in der Ellipsi gegeneinander haben.

Auflösung.

Es sey AB $=a$ der Parameter $=b$, AP $=x$, PM $=y$, Ap $=z$, pm $=v$, so ist

$$\left.\begin{aligned} yy &= bx - bx^2 : a \\ v^2 &= bz - bz^2 : a \end{aligned}\right\} \text{ (§. 240.).}$$

Derowegen ist $y^2 : v^2 = abx - bx^2 : abz - bz^2 = ax - x^2 : az - z^2 = (a-x)x : (a-z)z$, das ist, $PM^2 : pm^2 = PB.AP : pB.Ap$, nemlich

In der Ellipsi verhalten sich die Quadrate der halben Ordinaten wie die Rectangula aus den Theilen der Axe.

Der 1. Zusatz.

251. Derowegen ist auch $DC^2 : PM^2 = CB^2 : AP.PB$, folgends $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB$ (§. 142.), das ist, das Quadrat der halben kleinen Axe verhält sich zum Quadrate der halben grossen, wie das Quadrat der halben Ordinate zu dem Rectangulo aus den Theilen der Axe.

Der

Der 2. Zusatz.

252. Setzet demnach CP$=x$, so ist AP$=\frac{1}{2}a$ Tab. III. $-x$, PB$=\frac{1}{2}a+x$, folgends $\frac{1}{4}ab:\frac{1}{4}a^2=y^2$: Fig. 27. $\frac{1}{4}a^2-x^2$. Derowegen ist

$$ay^2=\frac{1}{4}a^2b-bx^2$$

$$y=\frac{1}{4}ab-bx^2:a$$

Der 3. Zusatz.

253. Es sey CD$=d$, AC$=r$, PC$=x$; so ist AP$=r-x$ und PB$=r+x$, folgends AP. PB$=r^2-x^2=$AC$^2-$PC^2, und daher

$$d^2:r^2=y^2:r^2-x^2$$

$$y^2=d^2(r^2-x^2):r^2$$

Also habt ihr noch eine andere Gleichung, welche die Natur der Ellipsis erkläret.

Die 90. Aufgabe.

254. Die Grösse der Linie zu determiniren, welche aus dem Brennpuncte f an das Ende D der kleinen Axe gezogen wird. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter$=b$, AB$=a$, so ist fC$^2=\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}ab$ (§. 245.) und DC$^2=\frac{1}{4}ab$ (§. 247.), folgends fD$^2=\frac{1}{4}a^2$ (§. 172. *Geom.*). Dannenhero fD$=\frac{1}{2}a=$CB.

Zusatz.

255. Wenn euch die kleine und grosse Axe gegeben werden, könnet ihr die Brennpuncte

F und f gar leicht finden. Denn theilet die grosse Axe AB in zwey gleiche Theile in C, und richtet aus C die halbe kleine Axe CD perpendicular auf, so könnet ihr aus D mit der halben grossen Axe CB die Brennpuncte F und f determiniren.

Tab. III. Fig. 27.

Die 91. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 31.

256. Die Grösse der geraden Linien FM und fM zu finden, welche aus beyden Brennpuncten F und f an das Ende M einer Semiordinate PM gezogen werden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$, $Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$. Nun ist (§. 251.).

$$BC^2 : DC^2 = AP . PB : PM^2$$

Das ist $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$

$$1 : 1 - \frac{4c^2}{a^2}$$

Solchergestalt ist

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$

$$PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$FM^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Wie-

Wiederum

$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$

$Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$

$fM^2 = c^2 + ac - 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$

$fM = \frac{1}{2}a + c - 2cx : a$

$FM = \frac{1}{1}a - c + 2cx : a$

$fM + FM = a = AB$, nemlich

In der Ellipsi sind die beyden Linien fM und FM, welche aus den Brennpuncten F und f an einen Punct M in der Peripherie gezogen werden, zusammen genommen, der grossen Axe AB gleich.

Zusatz.

257. Daher könnet ihr gar leicht aus der gegebenen grossen und kleinen Axe die Ellipsin beschreiben. Denn suchet die Brennpuncte F und f, und schlaget in ihnen zwey Nägel ein. Bindet an die Nägel einen Faden FMf, der so lang ist als die grosse Axe AB. Dehnet den Faden mit einem Stifte aus, und führet den Stift an dem Faden herum, so wird die Ellipsis beschrieben. Tab. III. Fig. 31.

Die 1. Anmerckung.

258. Ausser der Ellipsi des Apollonii, welche von dem ersten Geschlechte ist, könnet ihr noch unzählich viel andere von höheren Geschlechtern erdencken, welche unter der allgemeinen Gleichung begriffen werden: $ay^{m+n} = bx^m(a - x)^n$. Es ist nemlich in allen

wie der Parameter zu der grossen Axe, also die Dignität der halben Ordinate, deren Exponente den Exponenten der Dignitäten von den Theilen der Axe zusammen gleich ist, zu dem Producte aus diesen Dignitäten. Z. E. In der Ellipsi von dem andern Geschlechte ist $b:a=y^3:x^2(a-x)$; in der Ellipsi von dem dritten Geschlechte $b:a=y^4:x^2(a-x)^2$.

Die 2. Anmerckung.

259. Wenn die grosse Axe der kleinen gleich wird, so wird aus der Ellipsi ein Circul. Denn alsdenn ist $\frac{1}{4}ab=\frac{1}{4}a^2$ (§. 247.) und daher $b=a$, folgends an statt $ay^2=abx-bx^2$ bekommet ihr $ay^2=a^2x-ax^2$ das ist, $y^2=ax-xx$, welche Gleichung den Circul erkläret. Wie man nun aber Ellipses von höhern Geschlechtern hat, also giebt es auch Circul von höhern Geschlechtern, wenn ihr nemlich setzet $AP^m:PM^m=PM:PB$, das ist, $x^m:y^m=y:a-x$. Also ist die Gleichung für unendliche Circul $ax^m-x^{m+1}=y^{m+1}$. Z. E. Wenn $m=1$, so ist $ax-x^2=y^2$ für den Circul des ersten Geschlechts; ist $m=4$, so ist $ax^4-x^5=y^5$ die Gleichung für den Circul von dem vierten Geschlechte.

Tab. II. Fig. 19.

Die 25. Erklärung.

260. Die Hyperbel ist eine krumme Linie, in welcher $ay^2=abx+bxx$, das ist, wie eine unveränderliche Linie b, welche der Parameter heisset, zu einer andern unveränderlichen Linie a, welche die Zwerch-Axe (axis transversus) genennet wird, so das Quadrat der Semiordinate y^2 zu

dem

dem Rectangulo aus der Summe der Abscisse und Zwerchaxe $a+x$ in die Abscisse x.

Zusatz.

261. Derowegen ist $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bx^2 : (y^2 - bx)$ u. s. w. wie in der Ellipsi, nur daß ihr das Zeichen $+$ an statt des Zeichens $-$ habt.

Die 26. Erklärung.

262. Weil die Gleichung der Hyperbel mit der Gleichung für die Ellipsin übereinkommt, nur daß sie blos in dem einen Zeichen von ihr unterschieden ist; so nennet man auch hier die mittlere Proportionallinie zwischen der Zwerchaxe und dem Parameter die kleine Axe.

Die 27. Erklärung.

263. Wenn ihr die Axe der Hyperbel AX über den Scheitel A verlängert, und AB der Zwerchaxe gleich machet, so heisset der Punct C, durch welchen AB in zwey gleiche Theile getheilet wird, der Mittelpunct. Tab. IV. Fig. 32

Die 92. Aufgabe.

264. Aus dem gegebenen Parameter und der Zwerchaxe AB die Weite des Brennpuncts F von dem Scheitel A zu finden. Tab. IV. Fig. 32.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AF = a$; so ist $FR = \frac{1}{2}b$ (229.) und (§. 260.)

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + xx \quad \text{— } b$$

$$\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Tab. IV. Fig. 32. Machet $BE = \frac{1}{2}b$, so ist $EC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Richtet in C einen Perpendicul auf, und beschreibet über EA einen halben Circul; so ist $CG = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Machet $CF = CG$; so ist in F der Brennpunct.

Der 1. Zusatz.

265. Also ist die Weite des Brennpuncts von dem Mittelpuncte $FC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$.

Der 2. Zusatz.

266. Weil $ax + xx = \frac{1}{4}ab$, und $ax + xx =$ AF.FB, hingegen $\frac{1}{4}ab$ das Quadrat der halben kleinen Axe CD (§. 262.); so ist AF.FB $= CD^2$.

Die 93. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 32. 267. Die Verhältniß zu finden, welche die Semiordinaten PM und pm gegen einander haben.

Auf-

Auflösung.

Es sey die Zwerchaxe $AB = a$, der Parameter $= b$, $AP = x$, $PM = y$, $Ap = v$, $pm = z$, so ist $y^2 : z^2 = (bx + bxx : a) : (bv + bv^2 : a) = ax + xx : av + vv = (a + x)x : (a + v)v$, das ist, $PM^2 : pm^2 = PB.AP : pB.Ap$, nemlich

Die Quadrate der Semiordinaten verhalten sich wie die Rectangula aus den Abscissen und der Zwerchaxe in die Abscissen.

Die 94. Aufgabe.

268. **Die Verhältniß zu finden, welche das Quadrat der Zwerchaxe zu dem Quadrate der kleinen Axe hat.**

Auflösung.

Das Quadrat der Zwerchaxe ist aa, der kleinen Axe aber ab (§. 262.). Also verhält sich jenes zu diesem wie aa zu ab, das ist, wie a zu b (§. 144.) oder wie die Zwerchaxe zu dem Parameter.

Zusatz.

269. Weil $b : a = PM^2 : AP.PB$, (§. 260.); so ist auch das Quadrat der kleinen Axe zu dem Quadrate der Zwerchaxe wie das Quadrat der Semiordinate zu dem Rectangulo aus der Abscisse in die Summe aus der Abscisse und der Zwerchaxe. Tab. IV. Fig. 32.

Die 95. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 33.

270. Es seyn zwey Hyperbeln von gleicher Grösse, die also einen Parameter, eine Zwercharе und eine kleine Axe haben, einander entgegen gesetzet in der Weite ihrer Zwercharе AB. Ziehet aus beyder Brennpuncte f und F gegen einen Punct einer Hyperbel M zwey gerade Linien fM und fM. Ihr sollet ihre Grösse finden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC=fC=c$; so ist $AF=c-\frac{1}{2}a$, $Af=c+\frac{1}{2}a$, $PF=x-c+\frac{1}{2}a$, $Pf=c+\frac{1}{2}a+x$, $PF^2=xx-2cx+cc+ax-ac+\frac{1}{4}aa$, $Pf^2=cc+ac+\frac{1}{4}aa+2cx+ax+xx$. Nun ist (§. 266.) $CD^2=cc-\frac{1}{4}aa$ und (§. 268. 269.) $AC^2 : CD^2 = AP.PB : PM^2$, das ist, $\frac{1}{4}aa : cc-\frac{1}{4}aa = ax+xx : PM^2$ folgends $1 : 4cc-1 = ax+x^2 : PM^2$ $\frac{}{a^2}$

Demnach ist

$$PM^2 = -ax-xx+4c^2x:a+4ccxx:a^2$$
$$PF^2 = xx-2cx+cc+ax-ac+\tfrac{1}{4}aa$$
$$FM^2 = cc-2cx-ac+\tfrac{1}{4}aa+4c^2x:a+4c^2x^2:a^2$$
$$FM = c-\tfrac{1}{2}a+2cx:a$$

Wiederum

$$PM^2 = -ax-x^2+4c^2x:a+4c^2x^2:a^2$$
$$Pf^2 = cc+ac+\tfrac{1}{4}aa+2cx+ax+xx$$
$$fM^2 = cc+ac+\tfrac{1}{4}a^2+2cx+4c^2x:a+4c^2x^2:a^2$$
$$fM$$

$fM = c + \frac{1}{2}a + 2cx : a$
$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$

$fM - FM = a = AB$

Zusatz.

271. Hieraus fliesset folgende Manier die Hyperbel zu beschreiben. Auf eine gerade Linie ZX traget die Zwerchaxe AB und aus A in F, ingleichen aus B in f die Weite des Brennpunctes von dem Scheitel (§. 264.). Schlaget in F und f Nägel ein. Bindet an den Nagel F einen Faden FMC, und mit seinem anderen Ende an das eine Ende eines Lineals fC, welches um die Zwerchaxe AB länger als der Faden ist. Hänget das Lineal mit dem andern Ende an den Nagel in f. Drücket den Faden mit einem Stifte an das Lineal und schiebet es fort, so wird er die Hyperbel beschreiben. Tab. IV. Fig. 33.

Anders.

Traget auf eine gerade Linie die Zwerchaxe AB und ferner aus B in f und aus A in F die Weite des Brennpunctes von dem Scheitel (§. 264.). Ziehet aus f nach Gefallen die Linie fVII und traget aus f in L die Länge der Zwerchaxe BA. Beschreibet aus f mit beliebiger Eröffnung des Circuls die Bogen 1. 1, 2. 2, 3. 3, u. s. w. und durchschneidet Tab. IV. Fig. 32.

sie aus F mit LI, LII, LIII u. s. w. in 1. 2. 3. u. s. w. so sind die Puncte 1. 2. 3. ꝛc. in der Hyperbel.

Die 28. Erklärung.

Tab. IV. Fig. 34.

272. Wenn ihr die kleine Axe DE an den Scheitel der Hyperbel A rechtwinklicht setzet, und aus dem Mittelpuncte C durch ihre beyden Enden D und E die geraden Linien CR und Cr ziehet; so werden dieselben die Asymptoten genennet.

Der 1. Zusatz.

273. Weil CA : AE = CP : Pr und CA : DA (= AE) = CP : PR (§. 184. *Geom.*); so ist PR = Pr (§. 71. *Arithm.*), folgends, da PM = Pm, auch MR = mr (§. 31. *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

274. Wenn AI mit CR parallel gezogen wird; so ist EA ED = AI : DC (§. 182. *Geom.*), folgends da AE = $\frac{1}{2}$ED (§. 272.), auch AI = $\frac{1}{2}$DC = $\frac{1}{2}$CE. Weil nun ferner EA : ED = EI : EC (§. 184. *Geom.*) und daher, weil EA = $\frac{1}{2}$ED, auch EI = $\frac{1}{2}$CE = CI; so ist auch AI = CI (§. 28. *Arithm.*)

Die 29. Erklärung.

275. Das Quadrat der Linie AI oder CI wird die Potentz der Hyperbel genennet.

Die

Die 96. Aufgabe.

276. Die Grösse der Potentz der Hyperbel zu finden.

Auflösung.

Es sey $CA = \frac{1}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}c$; so ist $CE = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ (§. 172. *Geom.*), und daher $CI = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ folgends $CI^2 = (a^2 + c^2) : 16$, nemlich die Potentz der Hyperbel ist dem vierten Theile der Quadrate der beyden halben Axen gleich. Tab. IV. Fig. 34.

Die 97. Aufgabe.

277. Den Unterschied zwischen den Quadraten PM und PR zu finden. Tab. IV. Fig. 34.

Auflösung.

Weil $CA : DA = CP : PR$ (§. 184. *Geom.*) und $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 262.), $CP = \frac{1}{2}a + x$, so findet ihr $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab + 2x\sqrt{\frac{1}{4}ab} : a}$. Derowegen ist

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + bxx : a$$
$$PM^2 = \quad\quad bx + bxx : a \quad \text{(§. 261.)}$$

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = DA^2.$$

Zusatz.

278. Wenn ihr setzet, daß die Hyperbel mit ihrer Asymptote zusammen stosse, so fället der Punct R auf M und ist $PR^2 = PM^2$

folgends $PR^2 - PM^2 = 0$. Allein $PR^2 - PM^2 = DA^2$. Darum ist $DA^2 = 0$. Da nun dieses ungereimt ist, so kan die Asymptote mit der Hyperbel niemahls zusammen kommen.

Die 98. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 34.

279. Die Grösse des Rectanguli aus MR in Mr zu finden.

Auflösung.

Es sey $PR = c$, $MP = y$, so ist $MR = c - y$, $mR = y + c$, folgends $MR.mR = c^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$, nemlich

Das Rectangulum aus MR in mR ist gleich der Differentz der Quadrate von PR und PM.

Zusatz.

280. Weil $PR^2 - PM^2 = DA^2$ (§. 277.), so ist $mR.MR = DA^2$.

Die 99. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 34.

281. Wenn QM und sm mit der einen Asymptote Cr, hingegen qm und SM mit der anderen CR parallel gezogen wird, die Verhältniß der Rectangulorum aus QM in MS und qm in ms zu finden.

Auflösung.

Es sey $RM = mr = a$, $Rm = rM = b$, $MQ = v$, $mq = z$. Nun ist (§. 184. *Geom.*).

RM

RM : MQ = Rm : ms
$a : v = b : (bv:a)$
rm : mq = rM : MS
$a : z = b : (bz:a)$
Derowegen ist MQ . MS = $bvz : a$ und mq. ms = $bvz : a$, folgends MQ . MS = mq. ms. das ist,

Die Rectangula aus MQ in MS und mq in ms sind einander gleich.

Die 100. Aufgabe.

282. Die Verhältniß des Rectanguli aus qm in ms zu der Potenz der Hyperbel zu finden. Tab. IV. Fig. 34.

Auflösung.

Es sey mr = z, qm = y, AE = c; so sind wegen der Parallellinien AE und Pr die Winkel CEA und qrm, und wegen der Parallelen AI und qm die Winkel AIE und mqr einander gleich (§. 97. *Geom.*), folgends (§. 183. *Geom.*).

mr : qm = AE : AI
$z : y = c : (cy : z)$

Wiederum weil mR. mr = AE^2 (§. 280.); so ist (§. 237.).

mr : AE = AE : mR
$z : c = c : (c^2 : z)$

Endlich wegen der Parallellinien sm und CE ist $o = x$ und wegen der Parallelen DE und

Rm

Rm $x = y$ (§. 97. *Geom.*), folgends $o = y$ (§. 28. *Arithm.*): Wegen der Parallelen AI und CR aber ist IAE = CDE, und wegen der Parallelen DE und Rm, CDE = sRm ((§. 97. *Geom.*) folgends IAE = sRm (§. 28. *Arithm.*). Daher (§. 183. *Geom.*).

AE : IE = mR : sm

$$c : \frac{cy}{z} = \frac{cc}{z} : \frac{c^2y}{z^2}$$

Solchergestalt ist sm. qm $= c^2y^2 : z^2$. Da nun auch $AI^2 = c^2y^2 : z^2$; so ist sm. qm = AI^2, das ist,

Das Rectangulum aus sm, oder Cq, in qm ist der Potentz der Hyperbel gleich.

Der 1. Zusatz.

Tab. IV. Fig. 34. 283. Es sey CI = AI = a, Cq = x, qm = y; so ist $xy = aa$ die Gleichung, welche die Natur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten erkläret.

Der 2. Zusatz.

Tab. IV. Fig. 35. 284. Wenn demnach die Asymptoten BA und AC nebst der Potentz der Hyperbel DE^2 gegeben werden: so könnet ihr die Hyperbel beschreiben. Ziehet nemlich durch E die Linie FG mit AC und PN mit DE parallel. Ziehet ferner aus A in N eine gerade Linie AN und HM mit AC parallel; so ist der Punct M in der Hyperbel. Denn PA : PN = AD :

DH

DH (§. 184. *Geom.*), das ist, weil PN=DE und PM=DH, auch (§. 275.) ED=DA, AP: DE=AD : PM

$$x : a = a : y$$

folgends ————

$$a^2 = xy$$

Der 3. Zusatz.

285. Die Gleichung für unendliche Hyperbeln ist $a^{m+n} = x^m y^n$.

Anmerckung.

286. Eben so könnet ihr eine Gleichung für unendliche Hyperbeln in Ansehung der Axe finden $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$, deren Beschreibung Intieri in aditu ad nova arcana Geometrica detegenda lehret pag. 36. & seqq. Es ist aber zu mercken, daß nach seiner Manier die Hyperbeln von einem höheren Geschlechte niemahls beschrieben werden können, man habe denn zuvor alle niedrigeren beschrieben. Eine andere leichtere Manier zeige ich in den Actis Eruditorum A. 1717.

Der 4. Zusatz.

287. Wenn ihr wie vorhin AD=DE=a, AI=b, IP=x, PM=y setzet; so ist AP=$b+x$, folgends $a^2 = by + xy$. Tab. IV. Fig. 35.

Die 30. Erklärung.

288. Eine gleichseitige Hyperbel wird genennet, in welcher die beyden Axen AB und DE einander gleich sind. Tab. IV. Fig. 34.

Der 1. Zusatz.

289. Also ist auch der Parameter der Axe AB gleich (§. 262.).

Der

Der 2. Zusatz.

290. Wenn man in der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = bx + bx^2 : a$ demnach $a = b$ setzet; so kommt die Gleichung für die gleichseitige $y^2 = bx + x^2$.

Der 3. Zusatz.

Tab. IV. Fig. 34.

291. Weil CA = AE; so ist der Winkel ACE 45°, folgends der Asymptotenwinkel RCr ein rechter Winkel.

Anmerckung.

292. Damit nun erhelle, daß die Parabel Ellipsis und Hyperbel aus einem Kegel sich schneiden lassen, und also die Kegelschnitte der Alten sind; so will ich folgende drey Aufgaben noch hinzusetzen.

Die 101. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 36.

293. **Die Natur der krummen Linie zu finden, die heraus kommt, wenn man den Kegel ABC dergestalt schneidet, daß die Axe des Schnitts DE mit der Seite des Kegels CA parallel ist.**

Auflösung.

Es sey HI mit AB und PM mit EN parallel, AE = HP = v, PI = t, DP = x, DE = z; so ist (§. 148. *Geom.*).

$$DP : DE = PI : EB$$
$$x : z = t : (tz : x)$$

und $PM^2 = HP.PI$ (§. 198.) $= tv$, $EN^2 = AE.BE = tzv : x$ (§. *cit.*), folgends

$PM^2 : EN^2 = tv : (tzv : x)$
$= x : z$ (§. 144.)
$= DP : DE$

Solchergestalt ist DLN eine Parabel (§. 231.).

Die 102. Aufgabe.

294. Die Natur der krummen Linie zu finden, die entstehet, wenn ein Kegel BCA dergestalt geschnitten wird, daß die Axe des Schnittes DE den Diameter der Grundfläche AB durchschneidet, so sie beyde verlängert werden. Tab. IV. Fig. 37.

Auflösung.

Es sey $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = \int$; so ist $PE = a - x$, $QE = a - v$ und weil IH mit LK parallel,

$DP : PH = DQ : QK$ (§. 184. *Geom.*)
$x : t = v : (vt : x)$
$EQ : QL = EP : PI$
$a - v : \int = a - x : a\int - \int x$

$$\frac{a\int - \int x}{a - v}$$

Demnach ist $PM^2 = HP . PI = (t\int a - t\int x) : (a - v)$ und $QN^2 = KQ . QL = vt\int : x$ (§. 198.), folgends

$$PM^2 : QN^2 = \frac{t\int a - t\int x}{a - v} : \frac{vt\int}{x}$$
$$= ax - x^2 : av - v^2 \text{ (§. 144.)}.$$

Solchergestalt ist die Linie DLEND eine Ellipsis (§. 250.).

Die

Die 103. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 38. 295. Die Natur der krummen Linie zu finden, welche entstehet, wenn ein Regel ACB dergestalt geschnitten wird, daß die Axe des Schnittes DQ die Seite des Regels AC schneidet, wenn beyde verlängert werden.

Auflösung.

Es sey $ED = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $PI = \int$; so ist $EP = a + x$, $EQ = a + v$, und (§. 184. *Geom.*).

$$EP : PH = EQ : AQ$$
$$a + x : t = a + v : \frac{at + iv}{a + x}$$

$$DP : PI = DQ : QB$$
$$x : \int = v : (\int v : x)$$

Demnach ist $PM^2 = HP.PI = t\int$ und $QN^2 = AQ.QB = (at\int v + v^2\int t) : (ax + x^2)$ (§. 198.), folgends

$$PM^2 : QN^2 = t\int : \frac{at\int v + v^2\int t}{ax + x^2}$$
$$= ax + x^2 : av + u^2 \text{ (§. 144.)}.$$

Solchergestalt ist die Linie DLNMD eine Hyperbel (§. 267.).

Die 31. Erklärung.

296. Es sey eine gerade Linie BD, welche

che mitten in E von einer anderen AC rechtwinklicht durchschnitten wird. Ziehet aus C durch DB so viel gerade Linien als ihr wollet, und machet überall QM = EA. Die Linie, welche durch alle Puncte M gehet, ist die Muschellinie, (CONCHOIS oder CONCHILIS) des Nicomedis. Dergleichen Linie entstehet auch unten, wenn man überall QN = EF machet. Tab. V. Fig. 39.

Der 1. Zusatz.

297. Weil QM mit DB immer einen schiefern Winkel machet, je weiter sie von EA wegkommt; so muß die Conchois der geraden Linie DB immer näher kommen.

Der 2. Zusatz.

298. Doch weil QM niemahls zu einem Puncte werden kan, sondern vielmehr immer einerley Länge behält; so können auch die Puncte Q und M niemahls zusammen stossen, folgends kan die Conchois niemahls mit der Linie DB zusammen kommen. Und also ist DB ihre Asymptote.

Die 104. Aufgabe.

299. Eine Gleichung zu finden, welche die Natur der Muschellinie erkläret.

Auflösung.

Es sey $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$; so ist $CP = b + x$ und (§. 184. *Geom.*).

$$PE : QM = EC : CQ$$
$$x : a = b : (ab : x)$$

Daher $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$, folgends, weil $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 172. *Geom.*) $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$, das ist, $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$, welche Gleichung die Natur der oberen Muschellinie MAM erkläret.

Es sey $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$, so ist $GC = b - x$ und (§. 184. *Geom.*).

$$EG : QN = GC : CN$$
$$x : a = b - x : (ab - ax) : x$$

Daher, weil $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 172. *Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, das ist; $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$, welche Gleichung die Natur der unteren Muschellinie NFN erkläret.

Die 32. Erklärung.

Tab. IV. Fig. 40.

300. Wenn man die Semiordinaten des Circuls PM verlängert und auf die Sehnen AM den Perpendicul AN aufrichtet, die sie in N durchschneiden; so kommt die krumme Linie heraus, welche *Diocles* vor diesem *CISSOIDEM* genennet.

Der

Der 1. Zusatz.

301. Weil PB : PM = PM : PA und PM : PA = PA : PN (§. 210. *Geom.*); so sind die vier Linien EP, PM, AP und PN in einer steten Proportion. Tab. IV. Fig. 40.

Der 2. Zusatz.

302. Es sey AB = a, PN = y, AP = x, so ist PB = $a - x$. Da nun (§. 301. 142.)

$$BP^2 : PM^2 = AP^2 : PN^2$$

so ist $a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$

das ist $a - x : x = x^2 : y^2$

folgends $x^2 = ay^2 - xy^2$

oder $y^2 = x^3 : (a - x)$

Der 3. Zusatz.

303. Wenn $x = a$ und also BD = y, so ist $a^3 = 0y^2$, folgends $0 : 1 = a^3 : y^2$ und demnach BD in Ansehung AB unendlich groß, das ist, die Asymptote von der CISSOIDE.

Die 33. Erklärung.

304. Theilet einen Quadranten eines Circuls ABC in so viel gleiche Theile als euch beliebet. In eben so viel Theile theilet den halben Diameter AB in I. II. III. u. s. w. Richtet aus diesen Puncten Perpendicularlinien auf, und ziehet aus dem Mittelpuncte A in die Theilungspuncte des Bogens die Linien A1, A2, A3 u. s. w. welche die Perpen- Tab. V. Fig. 41.

dicularlinien in a, b, c, d, e durchschneiden. Die krumme Linie, welche durch die Puncte a, b, c &c. gehet, wird die *QVADRATRIX* des Dinostratis genennet.

Zusatz.

305. Derowegen ist allezeit wie der gantze Bogen BC zu dem Bogen C4, so AB zu AIV. Es sey BC = *b*, AB = *a*, C4 = *x*, AIV = *y*, so ist *ax* = *by*.

Die 34. Erklärung.

Tab. V. Fig. 42.

306 Theilet eine Linie Ap in lauter gleiche Theile, und richtet aus den Theilungspuncten A, P, p &c. Perpendicularlinien auf AN, PM, pm &c. die in einer geometrischen Proportion abnehmen. Die krumme Linie, welche durch die Puncte N, M, m &c. gehet, wird die Logarithmische genennet.

Zusatz.

307. Es sind demnach die Abscissen AP die Logarithmi der Semiordinaten PM (§. 21. *Trigon.*).

Anmerckung.

308. *Hugenius* hat zu Ende seines Discurses sur la pelanteur verschiedene Eigenschaften dieser Linie beschrieben, welche *Guido Grandus* in einem besonderen Buche demonstrirt, daß er unter dem Titul Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam seu Logarithmicam Lineam zu Florentz 1701. in 4. herausgegdben. Es können noch andere Arten der Logarithmischen Linien erdacht werden. Tab. V. Fig. 43. So hat man eine Logarithmische Spirallinie erfun-

funden, da der Quadrant AB in gleiche Theile getheilet wird, und aus dem Mittelpuncte C gegen die Theilungspuncte des Bogens die Radii CI. CII. CIII &c. gezogen, von ihnen aber in geometrischer Proportion die Linien C. 1. C. 2. C. 3. &c. abgeschnitten werden, durch deren Ende 1. 2. 3. ꝛc. die verlangte Linie gehet.

Die 35. Erklärung.

309. Wenn sich ein Circul auf einer Linie AC fort beweget, bis er sich ganz überworffen hat, so beschreibet der Punct a die Linie ABC, welche *CYCLOIS* oder die Radlinie genennet wird. Tab. V. Fig. 44.

Zusatz.

310. Es ist also die Linie AC der Peripherie des Circuls und überhaupt eine jede Semiordinate PM dem Bogen Ma gleich. Denn die gerade Linie Ad ist dem Bogen Pd, und daher der übrige Bogen Pb folgends auch der Bogen BM der Linie dD gleich. Nun ist OD=ML (§. 22. *Geom.*)=PN (§. 122. *Geom.* §. 2. *Trig.*). Derowegen da NM=dO, so ist auch PN+MN=Od+OD, das ist, PM=dD. Folgends ist die Semiordinate PM dem Bogen Pb, oder ihrer Abscisse BM gleich.

Die 36. Erklärung.

311. Wenn die Peripherie des Circuls APA, in gleiche Theile getheilet wird, und man den Radium CA in eben so viel Theile theilet, nach diesen CM einem, Cm zweyen ꝛc. solchen Theilen gleich machet; so sind die Puncte M, m &c. in der Spirallinie Tab. IV. Fig. 39.

linie des Archimedis. Diese Linie kan nach Gefallen unendlich verlängert werden, durch Hülfe neuer Circul, die mit dem zwiefachen, dem dreyfachen ꝛc. Radio beschrieben werden.

Zusatz.

312. Es sey die Peripherie $= p$, $AC = r$, $AP = x$, $PM = y$; so ist $CM = r - y$, folgende $pr - py = rx$. Wenn aber $CM = y$; so ist $py = rx$, und demnach für unendliche Spirallinien $r^n x^m = p^n y^m$.

Anmerckung.

313. Bisher habe ich die leichtesten Regeln der Algebra von den niedrigsten Gleichungen erkläret, und bey allerhand Aufgaben angebracht. Nun will ich die übrigen vornehmen, welche man in Auflösung der höheren Gleichungen vonnöthen hat.

Von der Natur der Gleichungen.

Die 37. Erklärung.

314. Die Wurtzel ist der Werth der unbekannten Grösse in einer Gleichung. Und ist es eine wahre Wurtzel, wenn sie das Zeichen + hat. Z. E. Wenn $x = +3$ hingegen eine falsche Wurtzel, wenn sie das Zeichen − hat. Z. E. Wenn $x = -3$.

Die 105. Aufgabe.

315. Die Natur der Gleichungen und ihre vornehmste Eigenschaften zu untersuchen.

Auflösung.

1. Nehmet so viel Werthe von x an als euch belie-

beliebet, formiret daraus einfache Gleichungen, und bringet sie auf 0.

2. Multipliciret die einfachen Gleichungen in einander, so werden die höheren herauskommen, deren Betrachtung euch ihre Eigenschaften offenbaren wird.

Es sey $x=2$ $x=a$

$x=-3$ $x=-b$

$x=4$ $x=c$

so ist $x-2=0$ $x-a=0$

$x+3=0$ $x+b=0$

$+3x-6$ $x^2+bx-ab=0$

x^2-2x $-ax$

$x^2+x-6=0$

$x-4=0$ $x-c=0$

$-4x^2-4x+24$ $x^3+bx^2-abx+abc=0$

x^3+x^2-6x $-ax^2-bcx$

$x^3-3x^2-10x+24$ $-cx^2+acx$

Wenn ihr diese Gleichungen (die ihr nach Belieben auf höhere Grade erhöhen könnet) betrachtet; so werdet ihr mit dem *Harriot* und *Carteſio* wahrnehmen,

1. Die bekannte Grösse des anderen Glie-

des sey die Summe aller Wurtzeln mit einem wiedrigen Zeichen; des dritten Gliedes die Summe der Producte aus zwey in zwey Wurtzeln; des vierten die Summe der Producte aus drey in drey Wurtzeln ꝛc. endlich das letzte Glied das Product aus allen Wurtzeln mit einander. Z. E. In der Quadratischen Gleichung ist die bekannte Grösse des anderen Gliedes + 1, die Wurtzeln sind + 2 und — 3.

2. Eine jede Gleichung habe so viel Wurtzeln als das erste Glied Abmessungen hat, oder der Exponent der Dignität desselben Gliedes Einheiten in sich begreiffet. Z. E. In der Quadratischen Gleichung ist der Exponente 2, die Zahl der Wurtzeln ist auch 2.

3. Und zwar seyn in jeder Gleichung so viel wahre Wurtzeln als Abwechslungen der Zeichen sind; so viel falsche als einerley Zeichen auf einander folgen. Z. E. In unserer Quadratischen Gleichung, die eine wahre Wurtzel + 2 und eine falsche — 3 hat, folgen auf einander + + und wechseln ab + —. In der Cubischen, welche zwey wahre Wurtzeln + 2 und + 4 und eine falsche — 3 hat; wechseln anfangs + —, darauf folgen auf einander — — und abermahls wechseln ab — +.

Die

Die 1. Anmerckung.

316. Der erste und andere Satz lässet sich gar leichte aus der Art, wie die Gleichungen entstehen, demonstriren, so daß ich es für unnöthig achte, den Beweiß hieher zu setzen. Allein den dritten, welchen *Harriot* zuerst durch vielen Versuch gefunden, hat zur Zeit noch keiner überhaupt erweisen können, daher ihn auch *Reynault* aus seiner Analyse demonstré gar weggelassen, weil er die Regeln der Algebra demonstriren wollen.

Die 2. Anmerckung.

317. Ihr dörffet euch nicht wundern, daß eine einige Gleichung so gar verschiedene Wurtzeln haben kan. Denn es ist zu wissen, daß eine einige Aufgabe öfters verschiedene Fälle haben kan, und wir in jedem Falle auf einerley Gleichung verfallen: wie wir Exempel von der Quadratischen Gleichung gehabt, da einerley Gleichung herauskommt, ob man die eine oder die andere von den gesuchten Grössen x nennet. Doch weil unterweilen einige Fälle unmöglich werden, so muß auch die Gleichung unmögliche Wurtzeln haben. Wie viel aber in jedem Falle unmögliche Wurtzeln sind, hat zwar *Newton* in seiner Arithmetica Universali p. 212. zu zeigen einigermassen sich bemühet; doch weil weder die Regel allgemein ist, noch auch er die Demonstration hinzu setzet, so wollen wir uns damit nicht aufhalten, zumahl da man sie auch in den Leipziger Actis A. 1708. p. 422. 523. findet.

Die 106. Aufgabe.

318. Die Wurtzel einer gegebenen Gleichung um eine gegebene Grösse zu vermehren oder zu vermindern, ungeachtet man sie noch nicht erkannt hat.

Auflösung.

Es sey die gegebene Æquation $x^3 - 6x^2 + 13x$

$+13x-10=0$. Ihr sollt die Wurtzel um 3 vermehren. Setzet

$$x+3=y$$

so ist $x=y-3$

$x^2=y^2-6y+9$

$x^3=y^3-9y^2+27y-27$

$-6x^2=-6y^2+36y-54$

$+13x=+13y-39$

$-10=-10$

$0=y^3-15y^2+76y-130$

Eine neue Gleichung, darinnen $y=x+3$.

Wenn ihr in der Gleichung die Wurtzel um 3 vermindern sollet, so setzet

$$y-3=x$$

so ist $y=x+3$

$y^2=x^2+6x+9$

$y^3=x^3+9x^2+27x+27$

$-15y^2=-15x^2-90x-135$

$+76y=+76x+228$

$-130=-130$

$0=x^3-6x^2+13x-10$

Eine neue Gleichung, darinnen $x=y-3$.

Die 107. Aufgabe.

319. Die Wurtzel in einer Gleichung durch eine gegebene Gröſſe zu multipliciren.

Auf-

Auflösung.

Ihr sollt in der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = o$ die Wurtzel durch a multipliciren. Setzet

$$ax = y$$

so ist $x = y : a$

$$x^2 = y^2 : a^2$$

$$x^3 = y^3 : a^2$$

$$-px^2 = -py^2 : a^2$$

$$+qx = +qy : a$$

$$-r = -r.$$

$$o = y^3 : a^3 - py^2 : a^2 + qy : a - r$$

a^3

$o = y^3 - apy^2 + a^2qy - a^3r$, Eine neue Gleichung, in welcher $y = ax$.

Zusatz.

320. Hieraus erhellet, daß ihr nur die vorgegebene Gleichung durch eine geometrische Progreßion multipliciren dörfet, deren erstes Glied 1, der Exponent aber diejenige Zahl ist, durch welche die Wurtzel multipliciret werden soll. Z. E. Es soll in der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = o$ die Wurtzel durch 2 multipliciret werden: so verfahret also.

$$x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$

$y^4+8y^3-76y^2-848y-1920=0$ eine Gleichung, darinnen $y=2x$.

Wiederum es soll in der Gleichung $x^4+qx^2-rx-s=0$ die Wurtzel durch c multipliciret werden. Verfahret also

$$x^4 \quad * \quad + qx^2-rx-s=0$$
$$1 \quad c \quad c^2 \quad c^3 \quad c^4$$

$y^4 \quad * \quad + c^2qy^2- c^3rx - c^4s=0$ eine neue Gleichung, darinnen $y=cx$.

Anmerckung.

321. Der Stern wird jederzeit in die Stelle der Glieder gesetzet, welche fehlen.

Die 108. Aufgabe.

322. Die Wurtzel in einer gegebenen Gleichung durch eine gegebene Grösse zu dividiren.

Auflösung.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3-px^2+qx-r=0$. Die Wurtzel soll durch a dividiret werden. Setzet

$x^1 : a$

$$x : a = y$$

so ist $x = ay$

$x^2 = a^2y^2$

$x^3 = a^3y^3$

$-px^2 = -a^2py^2$

$+qx = +aqy$

$-r = -r$

$0 = a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r$

$0 = y^3 - py^2 : a + qy : a^2 - r : a^3$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = x : a$.

Zusatz.

323. Hieraus erhellet, daß ihr die vorgegebene Gleichung nur durch eine geometrische Progreßion dividiren dörffet, deren erstes Glied 1, der Exponent aber diejenige Grösse ist, wodurch die Division geschehen soll. Z. E. Die Wurtzel von $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ soll durch 2 dividiret werden. Verfahret also:

$x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$

1 2 4 8 16

$y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0$

Eine neue Gleichung, darinnen $y = \frac{1}{2}x$.

Wiederum es soll die Wurtzel von $x^3 - 36x - 54 = 0$ durch 3 dividiret werden. Verfahret also:

$$\begin{array}{rrrr} x^3 * & -36x & -54 = 0 \\ 1\ 3 & 9 & 27 \\ \hline y^3 & -4y & -2 = 0 \end{array}$$

, eine neue Gleichung, darinnen $y = \frac{1}{3}x$.

Die 109. Aufgabe.

324. Eine Gleichung, darinnen einige Glieder fehlen, vollständig zu machen.

Auflösung.

Vermehret die Wurtzel um so viel als ihr wollet, oder vermindert sie (§. 318.): so ist geschehen, was man verlangete.

Z. E. Es sey $x^3 * - 23x - 70 = 0$.

Setzet

$$x + 1 = y$$

so ist $x = y - 1$

$$\begin{array}{rrr} & x^2 = y^2 - 2y + 1 & \\ \hline x^3 = y^3 & -3y^2 + & 3y - 1 \\ -23x = & & -23y + 23 \\ -70 = & & -70 \\ \hline 0 = y^3 & -3y^2 - & 20y - 48 \end{array}$$

Eine

Eine neue Gleichung, darinnen kein Glied fehlet und $y = x + 1$.

Die 110. Aufgabe.

325. Aus einer gegebenen Gleichung das andere Glied wegzuschaffen.

Auflösung.

Wenn das andere Glied das Zeichen + hat, so vermehret; hat es aber das Zeichen —, so vermindert die Wurtzel (§. 318.) durch den Quotienten, der heraus kommt, so man die bekannte Grösse des anderen Gliedes durch den Exponenten des ersten dividiret.

Z. E. Ihr sollt aus der Gleichung $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ das andere Glied wegnehmen.

Setzet $x - 8:3 = y$

so ist $x = y + 8:3$

$x^2 = y^2 + 16y:3 + 64:9$

$x^3 = y^3 + 8y^2 + 192y:9 + 512:27$

$-8x^2 = -8y^2 - 128y:3 - 512:9$

$-x = -y - 8:3$

$+8 = +8$

$0 = y^3 * - 67y:3 - 880:27$

Eine neue Gleichung, darinnen das andere Glied fehlet und $y = x - 8:3$.

Zusatz.

326. Wenn ihr also aus einer Quadratischen Gleichung das andere Glied wegnehmet;

met; könnet ihr solche noch auf eine andere Art, als vorhin (§. 83.) geschehen, auflösen. Z. E.

Es sey $x^2 - 8x + 15 = 0$. Setzet $x - 4 = y$;

so ist $x = y + 4$

$x^2 = y^2 + 8y + 16$

$-8x = -8y - 32$

$+15 = +15$

$0 = y^2 - 1$

$y = 1$

folgends $x = 1 + 4 = 5$

Die III. Aufgabe.

327. Aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen.

Auflösung.

Multipliciret die Wurtzel durch das Product aus den Nennern aller vorkommenden Brüche, oder eine Zahl, durch welche sich die Nenner dividiren lassen. So ist geschehen, was man verlangete.

Beweiß.

$y^3 * - 67y : 3 - 880 : 27 = 0$

1 3 9 27

$x^3 * - 201x - 880 = 0.$

Eine neue Gleichung, in welcher $x = 3y$

x^3

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{3}{4}x - 64 = 0$$
$$1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = 12x$.

Die 112. Aufgabe.

328. Aus einer gegebenen Gleichung die Irrationalgrössen abzuschaffen.

Auflösung.

Unterweilen kan solches durch die Multiplication; zuweilen durch die Division geschehen. Keine Regel ist allgemein.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4$$

$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0$$

eine neue Gleichung, darinnen $y = x\sqrt{2}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{16} \quad 4$$

$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0$$

Eine neue Gleichung, die gantz rational ist, und deren Wurtzel $y = x\sqrt[3]{4}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}aab = 0$$

Eine neue Gleichung, die gantz rational ist, und deren Wurtzel $y = x : \sqrt[3]{2}$

Anmerckung.

329. Alles, was bisher von den Gleichungen gelehret worden, ist zu dem Ende geschehen, damit wir sie völlig auflösen, das ist, den Werth der unbekanten Gröſſe, so wohl geometrisch, als in Zahlen finden könten, welches nun im folgenden gezeiget werden soll.

Die 113. Aufgabe.

330. Alle Rationalwurtzeln die in einer gegebenen Gleichung enthalten sind, zu finden.

Auflösung.

1. Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Weil 24 das Product aus allen Wurtzeln ist (§. 315.); so zerfället es in die Zahlen, durch deren Multiplication es entstehet, welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. und machet daraus folgende einfache Gleichungen $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$ ꝛc.

2. Dividiret die gegebene Gleichung durch diese einfachen, denn durch die sie sich dividiren lässet, die zeigen ihre Rationalwurtzeln (§. 315.). Als $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ lässt sich dividiren durch $x + 3$, derowegen ist -3 eine falsche Wurtzel von dieser Gleichung. Der Quotient, so heraus kommt, $x^2 - 6x + 8 = 0$ lässt sich ferner dividiren durch $x - 2$ und der neue Quotient

ist

ist $x-4$. Derowegen sind 2 und 4 zwey wahre Wurtzeln von der gegebenen Gleichung.

Anders.

Ihr dörfet auch nur die Zahlen, in welche das letzte Glied zerfället worden, nach einander in die Stelle von x setzen: denn wenn dadurch die gantze Gleichung zernichtet wird, so ist die vor x gesetzte Zahl eine von ihren Rationalwurtzeln (§. 315.). Z. E. Es sey $x^2-6x+8=0$. Das letzte Glied 8 entstehet, wenn ihr 2 durch 4 multipliciret.

Setzet $4=x$

so ist $16=x^2$

$-24=-6x$

$+8=+8$

$0=0$

Solchergestalt ist $+4$ eine von den Rationalwurtzeln.

Die 1. Anmerckung.

331. Weil in der ersten Manier das viele Dividiren beschwerlich fallen würde, hat man diesen Vortheil ausgedacht. 1 Ziehet die Zahl, welche ihr versuchen wollet, von der bekanten Zahl des andern Gliedes ab, und was heraus kommt, multipliciret durch eben selbige Zahl. 2. Das Product ziehet von der bekanten Zahl in dem dritten Gliede ab, und was überbleibet, multipliciret abermahls durch mehr gedachte Zahl. 3. Das neue Product ziehet von dem vierten Gliede ab, u.s.w. Wenn endlich bey dem letzten Gliede nichts übrig bleibet, so ist die versuchte Zahl eine von den

Rationalwurtzeln. Z.E. Ihr suchet die Rationalwurtzeln von $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Das letzte Glied 15 lässet sich in 1.3.5.15. zerfällen. Wenn ihr versuchen wollet, ob einige darunter von den Wurtzeln seyn, geschiehet es folgendergestalt.

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$
$$-1 \quad +2 \quad +15$$
$$-2 \quad -15 \quad 0$$
$$+2 \quad +15$$

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$
$$+3 \quad -18 \quad +15$$
$$-6 \quad +5 \quad 0$$
$$+3 \quad +3$$
$$-18 \quad +15$$

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$
$$-5 \quad -10 \quad +15$$
$$+2 \quad -3 \quad 0$$
$$-5 \quad -5$$
$$-10 \quad +15$$

Also ist $x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, das ist, 1 und 5 sind die beyden wahren Wurtzeln, 3 ist die falsche.

Die 2. Anmerckung.

332. Damit ihr aber sehet, daß dieser Vortheil aus der ersten Manier völlig genommen, und für keine besondere zu halten sey, will ich das vorige Exempel nach der gemeinen Art rechnen.

$$\begin{array}{l|l|l} x-1 & x^3-3x^2-13x+15=0 & x^2-2x-15 \\ & x^3-x^2 & \\ \hline & -2x^2-13x & \\ & -2x^2+2x & \\ \hline & -15x+15 & \\ & -15x+15 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Die 114. Aufgabe.

333. Die Schranken zu finden, zwischen welchen die Grösse der Wurzeln enthalten ist.

Auflösung.

Es sey $x^3-qx+r=0$, so ist $x^3+r=qx$ und demnach qx grösser als r, folgends x grösser als $r:q$. Wiederum qx ist grösser als x^3, und daher q grösser als x^2, folgends x kleiner als $\sqrt{q}$. Die Schrancken der Wurzeln in gegenwärtigem Falle sind also $r:q$ und $\sqrt{q}$.

Es sey $x^3+qx-r=0$, so ist $x^3+qx=r$ und demnach qx kleiner als r, folgends x kleiner als $r:q$. Wiederum r ist grösser als x^3 und daher x kleiner als $r^{1:3}$, folgends $xr^{2:3}$ grösser als x^3, und $xr^{2:3}+qx$ grösser als r, endlich x grösser als $r:(r^{2:3}+q)$. Also fället die Grösse der Wurzel zwischen $r:q$ und $r:(r^{2:3}+q)$.

Es sey $x^3-px^2+qx-r=0$, so ist $x^3-px^2=r-qx$. Wenn nun x grösser als p, so ist auch

r grösser als qx und dannenhero x kleiner als $r:q$. Hingegen wenn p grösser als x ist, so ist qx grösser als r, und dannenhero auch x grösser als $r:q$. Derowegen fallen in beyden Fällen die Wurtzeln zwischen p und $r:q$.

Es sey $x^3 - px^2 - qx + r = 0$, so ist $x^3 + r = px^2 + qx$, folgends $px^2 + qx$ grösser als r, und dahero auch $x^2 + qx:p + qq:4pp$ grösser als $r:p + qq:4pp$, $x + q:2p$ grösser als $\sqrt{(r:p + qq:4pp)}$ endlich x grösser als $\sqrt{(r:p + qq:4pp)} - q:2p$. Wiederum $px^2 + qx$ ist grösser als x^3, dannenhero $px + q$ grösser als x^2, und q grösser als $x^2 - px$, das ist, $x^2 - px + \frac{1}{4}pp$ kleiner als $q + \frac{1}{4}pp$, $x - \frac{1}{2}p$ kleiner als $\sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$, endlich x kleiner als $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$. Die Schrancken also der Wurtzeln sind $\sqrt{(r:p + qq:4pp)} - q:2p$ und $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$.

Es sey $x^4 - qx^2 - rx - s = 0$, so ist $x^4 - qx^2 = rx + s$. Demnach ist x^2 grösser als q, weil sich qx^2 von x^4 abziehen läst, und x grösser als $\sqrt{q}$. Daher $x\sqrt{q}$ grösser als q und $x^3\sqrt{q}$ grösser als qx^2. Wiederum weil $x^4 - rx = qx^2 + s$, so ist x^3 grösser als r und x grösser als $r^{1:3}$, daher x^3 grösser als $xr^{1:3}$, x^3 grösser als $xr^{2:3}$, und $x^3r^{1:3}$ grösser als rx. Endlich da $x^4 - s = qx^2 + rx$, so ist x^4 grösser als s, und x grösser als $s^{1:4}$, folgends x^3 grösser als $s^{3:4}$ und $x^3s^{1:4}$ grösser als s. Weil nun $x^4 = qx^2 + rx + s$, so ist x^4 kleiner als $x^3\sqrt{q} + x^3r^{1:3}$

+

$+x^3 s^{1:4}$, und deswegen x kleiner als $q^{1:2}+r^{1:3}+s^{1:4}$. Die Schrancken der Wurtzeln in gegenwärtigem Falle sind also $\sqrt{q}$ oder $r^{1:3}$ und $q^{1:2}+r^{1:3}+s^{1:4}$.

Eben so wird in anderen Fällen verfahren.

Anmerckung.

334. Damit ihr die vorgeschriebene Manier besser fassen möget, will ich ein Exempel in Zahlen anführen. Z.E. Es sey $x^3-3x+1=0$, so ist $q=3$ und $r=1$, folgends $r:q=1:3$ und $\sqrt{q}=\sqrt{3}$. Solchergestalt sind die Schrancken dieser Gleichung $\frac{1}{3}$ und $\sqrt{3}$, das ist, die Wurtzel muß grösser als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\sqrt{3}$ seyn.

Zusatz.

335. Wenn ihr die Zahl wisset, welche grösser als eure Wurtzel ist, so werdet ihr nicht mit vergeblichen Zahlen (§. 330. 331.) versuchen, ob sie unter die Rationalwurtzeln gehöre oder nicht.

Die 115. Aufgabe.

336. Aus einer Cubischen Gleichung die Wurtzeln zu finden.

Auflösung.

Wenn aus den cubischen Gleichungen das andere Glied weggenommen wird, so bekommet ihr drey Fälle, nemlich

$$x^3 = +px+q$$
$$x^3 = -px+q$$
$$x^3 = +px-q$$

Damit ihr nun die Wurtzel findet, so setzet

$$x = y + z$$

Dann ist $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$$px = py + pz$$

$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = py + pz + q$ im ersten

Setzet $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ (Falle.

$y + z$

so ist $3yz = p$

$$z = p : 3y$$

Ferner ist $y^3 + z^3 = q$

das ist $y^3 + p^3 : 27\,y^3 = q$

$y^6 + p^3 : 27 = qy^3$

$y^6 - qy^3 = -p^3 : 27$

$\frac{1}{4}qq \quad \frac{1}{4}qq$ (§. 83).

$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}qq = \tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3$$

$$y^3 - \tfrac{1}{2}q = \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)}$$

$$y = (\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3}$$

Nun ist

$$z^3 = q - y^3$$

das ist $z^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)}$

$$z = (\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)})^{1:3}$$

Demnach ist $z + y = (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3} + (\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p)})^{1:3}$ die verlangte Wurzel in dem ersten Falle.

Eben

Eben so findet ihr für x in dem anderen Falle $(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3)})^{1:3}+(\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$.

Und in dem dritten Falle $(-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3)})^{1:3}+(-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$.

Die 1. Anmerckung.

337. Diese Regeln werden insgemein *Cardani* Regeln genennet, weil sie aus *Scipionis Ferrei* Erfindung zuerst in Druck gegeben.

Die 2. Anmerckung.

338. Damit aber ihr Gebrauch erhelle, so will ich eines und das andere Exempel anführen. Es sey $x^3=*6x+40$. Weil $p=6, q=40$, und daher $\frac{1}{2}q=20, \frac{1}{4}qq=400, \frac{1}{3}p=2, \frac{1}{27}p^3=8$; so ist vermöge der ersten Regel $x=(20-\sqrt{(400-8)})^{1:3}+(20+\sqrt{(400-8)})^{1:3}=(20-\sqrt{392})^{1:3}+(20+\sqrt{392})^{1:3}=$ (wenn die Cubicwurtzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=4$. Ist demnach 4 eine wahre Wurtzel.

Es sey $x^3=*-3x+36$. Weil $p=3, q=36$, und daher $\frac{1}{2}q=18, \frac{1}{4}qq=324, \frac{1}{3}p=1, \frac{1}{27}p^3=1$; so ist vermöge der anderen Regel die Wurtzel $(18-\sqrt{(324+1)})^{1:3}+(18+\sqrt{(324+1)})^{1:3}=$ (wenn ihr die Cubicwurtzel beyderseits würcklich ausziehet) $1\frac{1}{2}-\sqrt{3\frac{1}{4}}+1\frac{1}{2}+\sqrt{3\frac{1}{4}}=3$.

Es sey $x^3=*6x-40$. Weil $p=6, q=40$, und daher $\frac{1}{2}q=20, \frac{1}{4}qq=400, \frac{1}{3}p=2, \frac{1}{27}p^3=8$; so ist vermöge der dritten Regel $(-20+\sqrt{(400-8)})^{1:3}+(-20-\sqrt{(400-8)})^{1:3}=(-20+\sqrt{392})^{1:3}+(-20+\sqrt{392})^{1:3}=$ (wenn die Cubicwurtzel beyderseits würcklich ausgezogen

zogen wird) $-2-\sqrt{2}+\sqrt{2-2}=-4$. Demnach ist 4 eine falsche Wurtzel der vorgegebenen Gleichung.

Die 3. Anmerckung.

339. Man hat zwar auf eine gleiche Art eine Regel für die Wurtzeln aus einer Gleichung von dem vierten Grade auszuziehen gefunden: allein weil sie nicht sonderlich gebraucht wird, so will ich die Anfänger damit nicht aufhalten, sondern gehe vielmehr fort und zeige, wie man durch Näherung die Wurtzel finden kan, wenn eine Gleichung keine Rationalwurtzel hat.

Die 116. Aufgabe.

340. Aus einer jeden gegebenen Gleichung die Wurtzel durch Näherung zu finden.

Auflösung.

Wir wollen die Regeln bald bey Exempeln anbringen, und zwar den Anfang von einer quadratischen Gleichung machen, damit wir sie desto besser begreiffen.

Es sey demnach $x^2-5x-31=0$. Setzet vermöge der Gräntzen, welche die Gleichung haben kan (§. 333.), die Wurtzel sey $8+y$, dergestalt, daß y einen Bruch bedeutet, um welchen 8 entweder grösser oder kleiner ist als x. Solchergestalt ist

$$\begin{aligned} x^2 &= 64+16y+y^2 \\ -5x &= -40-5y \\ -31 &= -31 \\ \hline 0 &= -7+11y+y^2 \end{aligned}$$

Da nun die Dignitäten eines Bruches bestän-

ständig abnehmen, und man hier nur die Wurzel beynahe wissen will, so lässet man y^2 weg, und nimmt an

$$-7+11y=0$$

das ist $11y=7$

$$y=0.6=0.\frac{6}{10}$$

Also ist $x=8+0.6=8.6$.

Weil der Werth von x in Zehentheiligen noch nicht genau genug bestimmet; so setzet $x=8.6+y$ und verfahret, wie vorhin. Ihr findet demnach

$$x^2=\frac{7396}{100}+\frac{172}{10}y+y^2$$
$$-5x=-\frac{430}{10}-5y$$
$$-31=-31$$

$$0=\frac{7396}{100}-\frac{430}{10}-31+\frac{172}{10}y-5y$$

Das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringet (welches hier den Anfängern zu Gefallen einmahl für allemahl geschehen soll.)

$$73.96-4300-3100+(1720-500)y=0$$

$$-0.04+12.20y=0.$$

$$12.20y=0.04.$$

$$y=0.0032$$

Also ist $x = 8.6000 + 0.0032. = 8.6032.$
Wenn ihr die Wurtzel noch genauer verlanget; so setzet $x = 8.6032 + y$. Alsdenn ist

$$x^2 = 74.01505024 + 17.20640000y + y^2$$
$$-5x = -43.01600000 - 5.00000000y$$
$$-31 = -31.00000000$$

$$0 = -0.00094976 + 12.20640000y$$

$$12.20640000y = 0.00094976$$

$$y = 0.000077808$$

Also ist $x = 8.603277808$

Man soll ferner die Wurtzel aus der Cubischen Gleichung $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ ausziehen. Setzet

$$x = 5 + y$$

so ist $x^3 = 125 + 75y \ldots$
$+2x^2 = +50 + 20y \ldots$
$-23x = -115 - 23y$
$-70 = -70$

$$0 = -10 + 72y$$

$$72y = 10$$

$$y = 0.1$$

Also ist $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Setzet

Setzet ferner $x = 5.1 + y$; so ist

$$x^3 = 132.651 + 78.030y \ldots.$$
$$+ 2x^2 = + 52.020 + 20.400y \ldots.$$
$$-23x = -117.300 - 23.000y.$$
$$-70 = - 70.000$$

$$0 = - 2.629 + 75.430y$$

$$75.430y = 2.629$$

$$y = 0.0348$$

Also ist $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$.

Wolte man die Wurzel noch genauer haben; so setzte man $x = 5.1348 + y$ und suchte den Werth von y, wie vorhin.

Wenn ihr die Wurzel geschwinder in vielen Zahlen genau haben wollet; so müsset ihr noch den Werth von y^2 beybehalten, und die quadratische Gleichung auf gewöhnliche Art (§. 83.) auflösen, nur daß ihr zehentheilige Brüche behaltet. Nemlich wenn $x = 5 + y$; so ist

$x^3 =$

$$x^3 = 125 + 75y + 15y^2$$
$$+ 2x^2 = + 50 + 20y + 2y^2$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = -70$$

$$0 = -10 + 72y + 17y^2$$

$$17y^2 + 72y = 10$$

$$y^2 + 4.2352y = 0.58823530$$
$$4.48422976 \quad 4.48422976$$

$$y^2 + 4.2352y + 4.48422976 = 5.07246506$$

$$y + 2.1176 = 2.2522$$

$$y = 0.1346$$

also ist $x = 5.1346$

Woltet ihr nun setzen $x = 5.1346 + y$ und wie vorhin den Werth von y finden; so würdet ihr gleich durch die andere Rechnung sehr weit hinauf kommen.

Die 1. Anmerckung.

341. In meinen Element. Analyt. (§. 327.) habe ich gewiesen, wie auf diese Art gar leicht die Regel des Herrn *Halley* heraus gebracht werde, daraus man in Engelland sehr viel machet. Allein weil die gegebene Regel eben so geschwinde den Werth der Wurtzel in so kleinen Theilen giebet, und doch viel leichter als die Hallejanische zu behalten ist, indem sie die Klarheit ihres Beweises mit sich führet: so kan man am sichersten bey derselben verbleiben.

Die 2. Anmerckung.

342. Nun könte ich auch zeigen, wie der Werth von x in den gegebenen Gleichungen geometrisch gesucht wird.

wird. Allein weil die geometrische Ausführung der determinirten Aufgaben sich am besten aus der Ausführung der undeterminirten herleiten läst; will ich zuerst arithmetische Exempel von dergleichen Aufgaben beybringen, zumahl da sie in der höheren Geometrie und der Differentialrechnung mehr Nutzen haben, als wohl einige vermeinen, auch besondere Kunstgriffe nachzusinnen an die Hand geben.

Von undeterminirten Aufgaben.

Die 117. Aufgabe.

343. Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der beyden ersten der dritten und ihre Differenz der vierten Zahl gleich sey.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl x, die andere y, die dritte z, die vierte t, so ist

$y+x=z$	$x-y=t$
$2y+t=z$	$x=t+y$
$2y=z-t$	$x=t+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}t$
$y=(z-t):2$	$x=(z+t):2$

da nun nicht mehr Gleichungen zu erdencken sind, können die Zahlen z und t nach Belieben angenommen werden. Es sey $z=8, t=2$; so ist $x=(8+2):2=10:2=5$, und $y=(8-2):2=6:2=3$. Es sey $z=5, t=1$; so ist $x=(5+1):2=6:2=3$, $y=(5-1):2=4:2=2$.

An-

Anmerckung.

344. Wenn ihr gantze Zahlen verlanget, so müssen vor z und t solche angenommen werden, deren Summe und Differentz sich durch 2 dividiren läst.

Die 118. Aufgabe.

345. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe zugleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die gegebene Zahl $= a$, die eine von den begehrten $= x$, die andere $= y$, so ist

$$xy + x + y = a$$

$$xy + x = a - y$$

$$x = (a - y) : (y + 1)$$

Es sey $a = 30$, $y = 2$, so ist $x = (30 - 2) : (2 + 1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Es sey $a = 20$, $y = 2$, so ist $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Es sey $a = 19$, $y = 4$, so ist $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

Die 119. Aufgabe.

346. Zwey Zahlen zu finden, deren Product ein vollkommener Cubus ist, dessen Wurtzel dem Producte aus der ersten in das Quadrat der anderen gleich ist.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl $= x$, die andere y, die Cubicwurtzel $= v$, so ist

$v =$

$v = xy^2$ | $xy = v^3$

$v : y^2 = x$ | $x = v^3 : y$

$v : y^2 = v^3 : y$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots y^2$

$v = v^3 y$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots v$

$1 = v^2 y$

$1 : v^2 = y$

Derowegen ist $v^5 = x$

Setzet $v = 2$, so ist $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Es sey $v = 3$, so ist $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

Die 120. Aufgabe.

347. Die Summe zweyer vollkommenen Quadrate in zwey andere vollkommene Quadrate zu theilen.

Auflösung.

Es sey die Seite des grösten Quadrates $= a$, des kleinesten $= b$: die Seite des einen von den gesuchten $a - z$, des anderen $yz - b$. So ist

$aa - 2az + zz + y^2z^2 - 2byz + bb = aa + bb$

$zz + yyzz = 2byz + 2az$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots z$

$z + yyz = 2by + 2a$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1 + y^2$

$z = (2by + 2a) : (y^2 + 1)$

Also ist $a-z=a-(2by+2a):(y^2+1)$ $=(ay^2+a-2by-2a):(y^2+1)=(ay^2-2by-a):(y^2+1)$. Hingegen $yz-b=(2by^2+2ay):(y^2+1)-b=(2by^2+2ay-by^2-b):(y^2+1)=(by^2+2ay-b):(y^2+1)$.

Es sey $a=3, b=2, y=2$; so ist $z=(8+6):5=14:5$, folgends $a-z=3-14:5=\frac{1}{5}$, und $yz-b=28:5-2=(28-10):5=18:5$. Deren Quadrate $(1+324):25=13=9+4$.

Man nimmt die beyden Seiten $a-z$ und $yz-b$ an, weil von der Summe der beyden Quadrate sich $aa+bb$ muß abziehen und das übrige durch z dividiren lassen, wenn der Werth von z rational seyn soll.

Die 121. Aufgabe.

348. Zwey vollkommene Quadrate zu finden, deren Differentz einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die Seite des kleinen $=x$, des grossen $x+y$, die Differentz $=d$. So ist das kleine Quadrat $=x^2$, das grosse $x^2+2xy+y^2$ folgends

$$\begin{array}{l} y^2+2xy=d \\ \hline 2xy=d-y^2 \\ \hline x=(d-y^2):2y \end{array}$$

Weil

Weil sich y^2 von d abziehen läst, so muß y kleiner seyn als $\sqrt{d}$.

Z. E. Es sey $d=10$, $y=3$; so ist $x=(10-9):6=\frac{1}{6}$, $x+y=3+\frac{1}{6}$. Es sey $d=11$, $y=2$; so ist $x=(11-4):4=\frac{7}{4}$, $x+y=2+\frac{7}{4}=\frac{15}{4}$.

Man nimmt die Seite des grossen Quadrates $x+y$ an und nicht bloß y, damit der Werth von x rational gefunden wird.

Die 122. Aufgabe.

349. Eine Zahl in zwey andere zu zertheilen, deren Product ein vollkommenes Quadrat ist.

Auflösung.

Es sey die Zahl $=2a$, die Differentz $=2y$; so ist die grosse $a+y$, die kleine $a-y$ (§. 61.), ihr Product $=aa-yy$). Setzet die Seite des Quadrates $xy-a$. So ist

$$\begin{array}{l} aa-yy=aa-2axy+x^2y^2 \\ \hline 2axy=x^2y^2+y^2 \\ \hline\hline y \\ 2ax=x^2y+y \\ \hline\hline x^2+1 \\ 2ax:(x^2+1)=y \end{array}$$

Es sey $x=2$, $2a=10$; so ist $y=20:5=4$, $a+y=5+4=9$, $a-y=5-4=1$.

Es sey $2a=10$, $x=0$; so ist $y=0$, folgends $a+y=5$, $a-y=5$.

Es sey $2a=10, x=3$; so ist $y=30:10=3$, $a+y=5+3=8$, $a-y=5-3=2$.

Die Seite des Quadrates wird $xy-a$ angenommen, damit man in der Gleichung aa wegbringen und das übrige durch y dividiren kan, damit der Werth von y rational gefunden wird.

Die 123. Aufgabe.

350. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der anderen gesetzet wird, die Summe ein Quadrat sey, deren Seite die Summe der Zahlen ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl x, die andere y; so ist

$$x^2+y=x^2+2xy+y^2$$

$$y-y^2=2xy$$

$$2y$$

$$(1-y):2=x$$

Es sey $y=\frac{1}{2}$; so ist $x=\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$. Es sey $y=\frac{1}{3}$; so ist $x=(1-\frac{1}{3}):2=\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$.

Die 124. Aufgabe.

351. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der anderen gesetzet wird, die Summe die Seite eines Quadrates sey, so den beyden Zahlen gleich ist.

Auf-

Auflösung.

Es sey die eine Zahl z, die andere y; so ist

$$z^2+y=\sqrt{(z+y)}$$
$$z^4+2z^2y+yy=z+y$$
$$z^4+2z^2y-y+yy=z$$

das ist, wenn $2z^2-1=v$

$$vy+yy=z-z^4$$
$$\tfrac{1}{4}v^2+vy+yy=\tfrac{1}{4}v^2+z-z^4$$
$$\tfrac{1}{2}v+y=\sqrt{(\tfrac{1}{4}v^2+z-z^4)}$$
$$y=\sqrt{(\tfrac{1}{4}v^2+z-z^4)}-\tfrac{1}{2}v$$

das ist, wenn ihr für v wieder seinen Werth in die Stelle setzet

$$y=\sqrt{(z^4-z^2+\tfrac{1}{4}+z-z^4)}-z^2+\tfrac{1}{2}$$

das ist $y=\sqrt{(\tfrac{1}{4}+z-z^2)}+\tfrac{1}{2}-z^2$

Wenn ihr nun Rationalzahlen verlanget, so muß $\frac{1}{4}+z-z^2$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Setzet demnach seine Seite $=zx-\frac{1}{2}$ (§. 349.), so ist

$$z^2x^2 - zx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + z - z^2$$

$$z^2x^2 - zx = z - z^2$$

$$zx^2 - x = 1 - z$$

$$zx^2 + z = x + 1$$

$$z = (x+1) : (x^2+1)$$

Es sey $x = 2$; so ist $z = (2+1) : (4+1) = \frac{3}{5}$, folgends $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{9}{25})} = (25 - 18) : 50 + \sqrt{((25+24) : 100)} = 7 : 50 + \sqrt{(49 : 100)} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{70+350}{500} = \frac{420}{500} = \frac{21}{25}$.

Die 125. Aufgabe.

352. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr das eine zu dem Producte von beyden addiret, eine jede Summe ein vollkommenes Quadrat sey.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2, so ist ihr Product x^2y^2; folgends sind $x^2y^2 + x^2$ und $x^2y^2 + y^2$ vollkommene Quadrate. Dividiret das erste durch x^2, das andere durch y^2; so sind $y^2 + 1$ und $x^2 + 1$ gleichfals vollkommene Quadrate. Nennet die Seite des ersten $z - y$, des andern $t - x$, damit sich y^2 und x^2 subtrahiren lässet, folgends der Werth

von

von y und x rational gefunden werden mag; so ist

$y^2+1=z^2-2zy+y^2$ | $x^2+1=t^2+2tx+x^2$

$1=z^2-2zy$ | $1=t^2-2tx$

$1+2zy=z^2$ | $2tx=t^2-1$

$y=(z^2-1):2z$ | $x=(t^2-1):2t$

Es sey $z=2$, $t=3$, so ist $y=(4-1):4=\frac{3}{4}$ und $x=(9-1):6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Es sey $z=3$, $t=4$; so ist $y=(9-1):6=\frac{4}{3}$ $x=(16-1):8=\frac{15}{8}$.

Die 126. Aufgabe.

353. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Producte gesetzet wird, ein vollkommenes Quadrat herauskommt.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2 so ist $x^2y^2+x^2+y^2$ ein vollkommenes Quadrat. Setzet anfangs aus vorhin (§. 352.) angeführtem Grunde.

$y^2-2ty+tt=yy+1$

so ist $t^2=1+2ty$

$(t^2-1):2t=y$

$t-y=t-(t^2-1):2t=(t^2+1):2t$

Setzet ferner $v = \sqrt{(yy+1)} = t-y = (t^2+1):2t$; so ist $x^2y^2+x^2+y^2 = x^2v^2+y^2$. Stellet dessen Seite $= z-vx$ (§. 349.); so ist

$$x^2v^2+y^2 = z^2-2v^2xz+x^2$$

$$y^2 = z^2-2vxz$$

$$2vxz = z^2-y^2$$

$$x = (z^2-y^2):2vz$$

Hier werden z und t nach Gefallen angenommen.

Es sey z. E. $z=2$, $t=3$, so ist $y=(9-1):6=8:6=\frac{4}{3}$, $v=t-y=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$ und also $x=(4-16):20=(36-16):20=20:20=3=1$

$$\frac{16}{9}\quad\frac{20}{3}\qquad\frac{16}{9}\quad\frac{20}{3}\qquad\frac{20}{9}\qquad\frac{3}{9}$$

Die 127. Aufgabe.

354. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr Product zu der Summe ihrer Quadrate gesetzet wird, ein vollkommenes Quadrat heraus kommt.

Auflösung.

Es sey die Summe der beyden Zahlen $2x$, ihre Differentz $2y$, die Seite des Quadrates $t+y$; so ist die grosse Zahl $x+y$, die kleine $x-y$, und demnach

$x^2 - y^2 + x^2 + 2xy + yy + x^2 - 2xy + yy$, d. i.
$3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + yy.$

$3x^2 - t^2 = 2ty$

$2t$

$(3x^2 - t^2) : 2t = y$

Es sey $x = 4$, $t = 6$, so ist $y = (48 - 36) : 12 = 12 : 12 = 1$, folgends $x + y = 4 + 1 = 5$, $x - y = 4 - 1 = 3$.

Die 128. Aufgabe.

355. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn sie durch zwey bekannte Zahlen multipliciret wird, beyde Producte ein vollkommenes Quadrat sind.

Auflösung.

Es sey die eine gegebene Zahl $= a$, die andere b, die gesuchte x, das eine Quadrat y^2, das andere v^2, so ist

$ax = y^2$ | $bx = v^2$

$x = y^2 : a$ | $x = v^2 : b$

$y^2 : a = v^2 : b$

$by^2 = av^2$

$y^2 = av^2 : b$

$y = v\sqrt{(a:b)}$

Wenn demnach eine Rationalzahl gefunden werden soll, muß $a:b$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Es sey $a=32$, $b=8$; so ist $\sqrt{(a:b)}=2$. Setzet $v=5$, so ist $y=10$, folgends $x=25\frac{8}{8}$.

Die 129. Aufgabe.

356. Eine Zahl zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn sie durch zwey gegebene Zahlen multipliciret, und zu jedem Producte noch eine andere Zahl adiret wird, beyderseits ein vollkommenes Quadrat heraus kommt.

Auflösung.

Es seyn die ersten beyden gegebenen Zahlen a und b, die anderen c und d, die gesuchte x, die beyden Quadrate yy und vv; so ist

$$\begin{array}{ll} ax+c=yy & bx+d=vv \\ x=(yy-c):a & x=(vv-d):b \\ (yy-c):a=(vv-d):b & \\ byy-bc=avv-ad & \\ byy=av^2-ad+bc & \\ y^2=(av^2-ad+bc):b & \\ y=\sqrt{((av^2-ad+bc):b)} & \end{array}$$

Wenn

Wenn ihr nun eine Rationalzahl verlanget, setzet $a:b=m^2$, so ist

$$y^2=m^2v^2-m^2d+c$$

Setzet ferner für die Seite des Quadrates $t-mv$ oder $mv-t$ (§. 349.), so ist

$$\frac{m^2v^2-m^2d+c=m^2v^2-2tmv+t^2}{2tmv=t^2+m^2d-c}$$

$$x=(t^2+m^2d-c):2tm$$

das ist, wenn ihr für m^2 seinen Werth wieder hinsetzet $v=(bt^2+ad-bc):2tbm$.

Es sey $t=4$, $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$, so ist $m^2=1:1=1$ und $m=1$, folgends $v=(16+3-2):8=17:8=2\frac{1}{8}$ und $x=289:64-3=(289-192):64=97:64$

Von den geometrischen Oertern.

Die 38. Erklärung.

357. **Die Linie, durch welche eine unbestimmte Aufgabe geometrisch aufgelöset wird, heisset ein geometrischer Ort (Locus Geometricus). Ins besondere nennet man es einen Ort an einer geraden Linie wenn sie eine gerade Linie ist: einen Ort, an dem Circul, wenn sie ein Circul ist: einen Ort an der Parabel, Hyperbel, *ELLIPSI***

LIPSI u.s.w. wenn sie eine von diesen Linien ist.

Die 39. Erklärung.

358. Der Ort an einer geraden Linie wird ein einfacher Ort (Locus simplex); der an einem Circul ein ebener Ort (Locus planus); der an einer Parabel, Hyperbel und Ellipsi ein cörperlicher Ort (Locus solidus) genennet.

Die 130. Aufgabe.

359. Einen Ort an einer geraden Linie zu beschreiben.

Auflösung.

Einen Ort beschreiben, heisset die Linie ziehen, welche der undeterminirten Aufgabe eine Gnüge thut. Alle Oerter an einer geraden Linie lassen sich durch folgende Gleichungen vorstellen:

$$y = \frac{ax}{b}, \quad y = \frac{ax}{b} \mp c, \quad y = c - \frac{ax}{b}.$$

Tab. V. Fig. 45. Ziehet also eine gerade Linie AB und machet Al = *b*. Ziehet unter einem beliebigen Winkel El = *a*. Wenn PM, pm &c. mit El parallel gezogen werden; so sind AP, Ap &c. = *x*, PM, pm &c. = *y*. Denn (§. 184. *Geom.*).

Al:

$$AI : IE = AP : PM$$
$$b : a = x : y$$
$$\frac{}{}$$
$$ax : b = y$$

Verlängert EI in G, bis $IG = c$ und ziehet durch G die Linie Dq mit AB, AD mit EG parallel. Wenn PM bis in Q verlängert wird; so ist $DQ = AP = x$ und $QM = \frac{ax}{b} + c = y$.

Hingegen machet $LG = b$ und $GE = a$, $IG = c$; so ist $QM = ax : b$ (§. 184. *Geom.*) und $PM = \frac{ax}{b} - c$.

Endlich sey $AC = c$ und $AD = b$. Ziehet durch D die Linie FE mit AC parallel und machet $DE = a$. Ziehet ferner die Linie AL und mit ihr CB, hingegen NM mit AC parallel; so ist $PN = ax : b$ (§. 184. *Geom.*), folgends $PM = MN - NP = c - ax : b$. Tab. V. Fig. 46.

Die 131. Aufgabe.

360. Einen jeden Ort an einer Parabel zu beschreiben.

Auflösung.

Es können zwey Fälle vorkommen. Denn es beziehen sich die Linien x und y entweder auf die Höhlung, oder das erhabene der Parabel.

Im

Tab. V. Fig. 47. Im ersten Falle sey KD = PN = n, AK = p, DH = q, LH = r, DL = s, der Parameter = t, DQ = x, QM = y; so ist (§. 184. *Geom.*).

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Demnach $AP = KP\ (= DN) - KA = \frac{sx}{q}$

$- p$ und $PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n$,

folgends weil t. $AP = PM^2$ (§. 217.).

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tsx}{q} - tp.$$

das ist

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tsx}{q} + tp$$

Tab. V. Fig. 48. Im anderen Falle sey DK = PN = n, AK = p, DH = q, LH = r, DL = s, DQ = IM = y, QM = DI = x; so ist (§. 184. *Geom.*).

DH

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = y : \frac{sy}{q}$$

Demnach $AP = KP (= DN) - AK = sy - p$ u. $\frac{ry}{q}$

$PM = QM - QN - NP = x - \frac{ry}{q} - n$, folgends

weil $t.\ AP = PM^2$ (§. 217.).

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = \frac{tsy}{q} - tp$$

das ist,

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tsy}{q} + tp$$

Wenn ihr nun die Glieder einer gegebenen Gleichung mit denen Gliedern einer von den gefundenen vergleichet, so könnet ihr in jedem Falle finden, wie groß die Linien DK, AK, DH und LH in dem vorkommenden Falle anzunehmen sind, oder welche von ihnen gar wegbleiben, und solchergestalt, den verlangten Ort beschreiben.

Z. E.

Z. E. Es sey $y^2 - ax = o$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$-2r = o, \quad -2n = o, \quad -t\int = -a, \quad n^2 + tp = o$$

$$\frac{q}{r = o, \; q = s} \qquad \frac{n = o}{} \qquad \frac{q}{t = a} \qquad \frac{p = o}{}$$

Tab. V. Fig. 47. Weil demnach LH = o, und DK = o; so fället die Linie DH auf KP und, weil AK = o, der Punct K in A, folgends DQ in AP und QM in PM, und ist weiter nichts nöthig, als daß mit dem Parameter a eine Parabel beschrieben wird. Denn so ist AP = x und PM = y.

Wiederum es sey $y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = o$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$-2r = o \quad -2n = -a \quad -t\int = -b$$

$$\frac{q}{r = o, \; q = s} \qquad \frac{n = \frac{1}{2}a}{} \qquad \frac{q}{t = b}$$

$$n^2 + tp = \tfrac{1}{4}aa$$

$$\frac{\frac{1}{4}aa + bp = \frac{1}{4}aa}{bp = o}$$

$$\frac{}{p = o}$$

Tab. V. Fig. 47. Tab. VI. Fig. 49. Weil demnach LH = o, so fället DH auf DL. Weil KA = o; so fället K in A. Solchergestalt wird mit dem Parameter b eine Parabel AMR beschrieben, auf der Axe AB in A

ein

ein Perpendicul $AL = \frac{1}{2}a$ aufgerichtet, und LQ mit AB, QM aber mit LA parallel gezogen; so ist $LQ = x$, $QM = y$. Denn weil PM $y - \frac{1}{2}a$; so ist

$$\frac{y^2 - ay + \frac{1}{4}aa = bx \text{ (§. 217.).}}{\text{folgends } y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = o}$$

Es sey $y^2 - ay - bx - cc = o$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$\frac{-2r = o \quad -2n = -a \quad -ts = -b}{q \qquad n = \frac{1}{2}a \qquad q}$$

$$r = o,\ q = s \qquad t = b$$

$$\frac{n^2 + tp = -cc}{\frac{1}{4}aa + bp = -cc}$$

$$\frac{bp = -cc - \frac{1}{4}aa}{p = \frac{-cc - \frac{1}{4}aa}{b}}$$

Beschreibet mit dem Parameter b eine Parabel AMR und richtet in A auf die Axe AN eine Perpendicularlinie AH auf. Machet $AE = \frac{1}{2}a$, $AF = c$; so ist $EF = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + cc)}$. Machet $EF = AI = AG$ und $AH = b$; ziehet die Linie HI und mit ihr GK parallel; so ist $AK = (cc + \frac{1}{4}aa) : b$. Wenn nun endlich EQ mit der Axe AN und DK, ingleichen QM mit EA Tab. VI. Fig. 50.

parallel gezogen werden; so ist $DQ = x$ und $QM = y$. Denn $AP = EQ = AK + KP = cc + \frac{1}{4}aa + x$ und $PM = y - \frac{1}{2}a$, folgends

$$\frac{}{b}$$

weil $PM^2 = b.AP$ (§. 217.).

$$y^2 - ay + \tfrac{1}{4}aa = cc + \tfrac{1}{4}aa + bx$$

das ist, $y^2 - ay - bx - cc = o$.

Die 132. Aufgabe.

361. Einen Ort an einer Ellipsi zu beschreiben.

Auflösung.

Tab. VI. Fig. 51. Es sey in C der Mittelpunct der Axe, $CK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = \int$, $AC = CB = m$, der Parameter $= t$, $DQ = x$, $QM = y$; so ist (§. 184. *Geom.*).

$$DH : LH = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : \int = x : \frac{\int x}{q}$$

Daher $CP = DN - KC = \frac{\int x}{q} - p$ und $PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n$. Da nun in der Ellipsi (§. 239.).

$$t : 2m$$

$$t : 2m = PM^2 : AP.PB$$

und $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$

$$AP = m + \frac{\int x}{q} - p \text{ und } PB = m - \frac{\int x}{q} + p$$

also $AP.PB = m^2 - p^2 + \frac{2p\int x}{q} - \frac{\int^2 x^2}{q^2}$:

so ist $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 =$

$$\frac{tm^2 - tp^2}{m} + \frac{2tp\int x}{2mq} - \frac{t\int^2 x^2}{2mq^2}, \text{ folgends}$$

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$

$$+ \frac{t\int^2 x^2}{2mq^2} - \frac{2tp\int x}{2mq} + \frac{tp^2}{2m}$$

$$- \frac{tm^2}{2m}$$

Wenn ihr die vorgegebene Gleichungen, wie vorhin in der Parabel, mit dieser allgemeinen vergleichet; so werdet ihr in jedem Falle den Ort an der Ellipsi beschreiben können.

Z. E. Es sey $y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$;

so ist

$$\frac{-2r=0}{q} \quad \frac{tf^2=c}{2mq^2} \quad \frac{-2n=0}{b} \quad \frac{-2tpf=cd}{n=0} \quad \frac{}{2mq} \quad \frac{}{b}$$

$r=0, q=f$ $\quad \frac{t=c}{2m} \quad \frac{}{b}$ $\quad -2p=d$ $\quad p=-\frac{1}{2}d$

$$\frac{tp^2-tm^2=-a^2c}{2m \quad 2m \quad b}$$

$$\frac{cp^2-cm^2=-a^2c}{b \quad b \quad b}$$

$$p^2-m^2=-a^2$$

$$\tfrac{1}{4}dd+aa=m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}dd+aa)}=m$$

Tab. VI. Fig. 52. Richtet demnach auf der Linie AB in C die Linie CE=a perpendicular auf, und machet KC=$\frac{1}{2}d$; so ist KE=$\sqrt{(\frac{1}{4}dd+aa)}$. Machet CA=CB=KE; so ist AB die Axe der Ellipsis. Machet ferner CH=b und CI=c; ziehet die Linie HI und mit ihr AG parallel; so ist GC der halbe Parameter. Machet endlich CO=CG und beschreibet über AO einen halben Circul; so ist CL die halbe kleine Axe, und ihr könnet die Ellipsin ALB (§. 257.) beschreiben, in welcher KP=x und PM=y. Denn CP=$x+\frac{1}{2}d$, AP=$\sqrt{(\frac{1}{4}dd+aa)}+x+\frac{1}{2}d$, PB=$\sqrt{(\frac{1}{4}dd+aa)}-x-\frac{1}{2}d$, und daher AP.PB=$aa-xx-dx$. Da nun $c:b$=PM^2:AP. PB=$y^2:aa-xx-dx$ (§. 239.); so ist

$y^2=$

$$y^2 = \frac{a^2c}{b} - \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b}$$

folgends $y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$

Zusatz.

362. Wenn man $t = 2m$ setzet, so kommt die Gleichung für alle Oerter am Circul.

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} + p^2$$
$$q - m^2$$

Die 133. Aufgabe.

363. Einen Ort an einer Hyperbel zu beschreiben.

Auflösung.

Es sey die Zwerchaxe $AB = 2m$, in C der Mittelpunct, $CK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, der Parameter $= t$; so ist (§. 184. *Geom.*). Tab. IVI. Fig. 53.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : \int = x : \frac{\int x}{q}$$

Also ist $CP = DN (= KP) - CK = \frac{\int x}{q} - p$ und

$$PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n,$$

Nun ist $t : 2m = PM^2 : AP . PB$ (§. 260.), und

$$PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$$

$$AP . PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$$
$$= \frac{\int^2 x^2}{q^2} - \frac{2p\int x}{q} + p^2 - m^2$$

Derowegen

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$$
$$= \frac{t\int^2 x^2}{q^2} - \frac{2tp\int x}{q} + tp^2 - tm^2,$$

folgends

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{t\int^2 x^2}{q^2} + \frac{2tp\int x}{q} + tp^2 - tm^2$$

$$\frac{2mq^2}{2mq^2} \quad \frac{2mq}{2mq} \quad \frac{2m}{2m}$$

$$- \frac{tp^2}{2m}$$

Wel-

Welche Gleichung eben so wie die vorigen gebrauchet wird (§. 360. 361.).

Die 134. Aufgabe.

364. Einen Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu beschreiben.

Auflösung.

Es seyn SA und AR die Asymptoten einer Hyperbel. Ziehet DL mit der einen AR parallel, und nach Belieben die Linie DH; hingegen KD, QM, LH, IR mit der anderen AS parallel. Es sey ferner KD = PN = n, KA = p, DH = q, LH = r, DL = $\int$, DQ = x, QM = y. RI = m, AR = DL = $\int$; so ist (§. 184. *Geom.*). Tab. VI. Fig. 54.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : \int = x : \frac{\int x}{q}$$

Derowegen ist $AP = DN - AK = \frac{\int x}{q} - p$

und $PM = QM - PN - NQ = y - n - \frac{rx}{q}$, folgends, weil AR. RI = AP. PM (§. 281.).

$$m\int = \int yx - \frac{\int rx^2}{q} - py - \frac{\int nx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$q m\int = \int\int yx - \frac{\int rx^2}{q} - qpy - \int nx + prx + pnq$$

$$qm = yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{\int} - nx + \frac{prx}{\int} + \frac{pnq}{\int}$$

$$yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{\int} + \frac{prx}{\int} + \frac{pnq}{\int} = o$$

$$-nx - mq$$

Tab. VI. Fig. 55.

Wenn alles wie vorhin bleibet, nur daß TM mit DH parallel gezogen und QM = DT = x, hingegen TM = QD = y angenommen wird; so findet man wie vorhin.

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{\int} + \frac{pry}{\int} + \frac{pnq}{\int} = o$$

$$-ny - mq$$

Welche beyde Gleichungen eben wie die vorigen gebrauchet werden.

Anmerckung.

365. Wenn man die gefundenen allgemeinen Gleichungen für die geometrischen Oerter gegeneinander hält; so wird man folgende Regeln wahrnehmen, dadurch man urtheilen kan, ob eine gegebene Gleichung ein Ort an einer Parabel, oder Ellipsi, oder Hyperbel, oder einem Circul sey. Nemlich wenn xy in einer Gleichung vorhanden, und 1. nur ein Quadrat entweder von x, oder von y durch andere Grössen multipliciret vorkommt; so ist der Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. 2. Wenn das Quadrat

drat von x^2 oder y^2 durch das Quadrat der halben Grösse multipliciret ist, durch welche man xy multipliciret befindet; so ist der Ort an einer Parabel 3. Wenn x^2 und y^2 beyde das Mehrzeichen + haben; so ist der Ort an einer Ellipsi oder einem Circul: und zwar siehet man, daß er an einem Circul sey, wenn man $1:2m = 1$ findet. 4. Endlich wenn x^2 und y^2 verschiedene Zeichen haben; so ist der Ort an einer Hyperbel, die um ihre Axe beschrieben worden: welche beyde letztere Regeln 5. auch gelten, obgleich xy fehlet. Hingegen ist 6. in diesem letzteren Falle in dem Orte an der Parabel auch x^2 nicht vorhanden.

Die 135. Aufgabe.

366. Eine cubische und biquadratische Gleichung geometrisch auszuführen.

Auflösung.

1. Wenn in der Gleichung nur eine unbekannte Grösse vorhanden als y, so nimmt man noch eine x dazu, und bringet die vorgegebene Gleichung auf geometrische Oerter.

2. Wenn man zwey von diesen Oertern gebührend beschreibet, daß nemlich die Linien x und y beyderseits auf einander fallen; so giebet der Durchschnitt beyder Oerter den verlangten Werth von y.

Z. E. Die vorgegebene Gleichung sey $y^3 + aby = a^2c$; so ist $a:y = y^2 + ab:ac$

Setzet $a:y = y:x$

so ist 1. $ax = y^2$

daher $x = y^2 : a$
ingleichen $y : x = y^2 + ab : ac$
$= ax + ab : ac$
$= x + b : c$

II. $x^2 + bx = cy$

$ax = y^2$ $ax = y^2$
$x^2 + bx = cy$ $x^2 + bx = cy$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$ IV. $ax + x^2 + bx = y^2 + cy$

Ferner $x^2 + bx = cy$ $y^3 + aby = a^2c$
das ist $x^2 + \frac{by^2}{a} = cy$ $axy + aby = a^2c$

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$ VI. $xy + by = ac$

Solchergestalt findet man

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.
II. $x^2 + bx - cy = o$ an der äusseren Parabel
III. $y^2 + x^2 - cy + bx = o$ an dem Circul.
$- ax$
IV. $y^2 - x^2 + cy - ax = o$ an der Hyperbel
$- bx$
V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = o$ an der Ellipsi.
VI. $xy + by - ac = o$ an der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

Weil

Weil sich der Circul am leichtesten beschreiben lässet; so kan man ihn mit einem von den übrigen fünf Oertern beschreiben und dadurch den Werth von y finden.

Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel (§. 220.) so ist in ihr eine jede Abscisse $DP = x$, eine jede Semiordinate aber $PM = y$ (§. 217.). Tab. VII. Fig. 56.

Für den Circul ist (§. 362.).

$$\frac{2r = o \quad -2n = -c \quad -2p = b - a}{q \qquad n = \frac{1}{2}c \qquad p = \frac{a-b}{2}}$$

$$r = o,\ q = \int$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\text{das ist } \tfrac{1}{4}c^2 + (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2)} = m$$

Derowegen traget auf eine gerade Linie A B aus C in K $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ und richtet in K die Linie $KD = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; so ist CD der Radius des Circuls DAMB. Wenn ihr selbigen beschrieben; so ziehet DP mit AB parallel, und ihr habet $DP = x$, $PM = y$. Fig. 57.

Nun siehet man leicht, wie der Circul mit der Parabel zu vereinigen, damit die Linien DP und PM auf einander fallen. Richtet nemlich in D die Linie $DK = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; ziehet KQ mit DP parallel, und machet $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Endlich beschreibet mit CD Fig. 56. 57.

durch

durch den Scheitelpunct D den Circul; so ist PM $= y$.

Denn $DP = KQ = \frac{y^2}{a}$ (§. 222.) und daher

$CQ = KQ - KC = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Ferner

ist $QM = PM - DK = y - \frac{1}{2}c$, folgends

$$QC^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{by^2}{a} - \frac{ab}{2} + \frac{1}{4}bb$$

$$QM^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$$

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{ab}{2} + \frac{1}{4}b^2$$

$$CM^2 = DC^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 \text{ subtr.}$$

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$\text{---------- } y : a^2$$

$$y^3 + aby - a^2c = 0$$

Auf eben solche Art kan man die Oerter an der Ellipsi und der Hyperbel beschreiben und den Circul darauf tragen, damit man den Werth von y findet: welches in folgenden Aufgaben durch wahre Exempel soll erkläret werden.

Es sey die vorgegebene Gleichung $y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$. Weil $y^4 + 2by^3 = a^3d - a^2cy$; so ist

a^2

$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$

Setzet $a : y = b + y : x$

so ist I. $ax = by + y^2$

$ax - by = y^2$

daher $a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$

II. $a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - b^2 y^2$

Setzet ferner für y^2 seinen Werth $ax - by$;
so ist

$$a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - ab^2 x + b^3 y$$

folgends III. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$

$$y^2 + by = ax$$

IV. $y^2 + by + ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 + ax - \frac{b^2 x}{a}$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3 y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2 x}{a}$

Solchergestalt findet man

I. $y^2 + by - ax = o$ an der Parabel.

II. $y^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} - \frac{a^2 cy}{b^2} + \frac{a^3 d}{b^2} = o$ an der Hyperbel.

III. $x^2 - \frac{b^2 x}{a} + cy - ad = o$ an der äusseren Parabel.

$$+ \frac{b^3 y}{a^2}$$

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3 y}{a^2} + \frac{b^2 x}{a} + ad = o$ an der gleichseitigen Hyperbel

$$+by - ax$$
$$-cy$$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} - \frac{b^2 x}{a} - ad = o$ an dem Circul.

$$+by - ax$$
$$+cy$$

Wenn man nun alle diese Oerter (§. 360.362. 363.) beschreibet, und die an den Kegelschnitten mit dem an dem Circul, wie vorhin verknüpfet; so hat man der gegebenen Gleichung auf vielerley Art eine Gnüge gethan.

Anmerckung.

367. Ich halte es für rathsamer, daß ich die vornehmsten Fälle, so vorkommen können, durch wahre Exempel erläutere.

Die 136. Aufgabe.

368. Zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden.

Auflösung.

Tab. VII. Fig. 58.

Es sey die kleine $= a$ von den gesuchten
die grosse $= b$ die kleine $= y$
die grosse $= x$

so ist

$a : y = y : x$	$y : x = x : b$
I. $ax = y^2$	II. $by = x^2$

$a : y$

$a:y=x:b$ | $y^2=ax$

III. $ab=xy$ | V. $by-y^2=x^2-ax$

$ax=y^2$ | $x^2=by$

$x^2=by$ | 2

$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}by$

V. $x^2+ax=y^2+by$ | $ax=y^2$

VI. $\frac{1}{2}x^2+ax=\frac{1}{2}by+y^2$

VII. $ax-\frac{1}{2}x^2=y^2-\frac{1}{2}by$

Solchergestalt bekommet man folgende Oerter:

I. $y^2-ax=o$ an der Parabel.

II. $x^2-by=o$ an der äusseren Parabel.

III. $xy-ab=o$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

IV. $y^2+x^2-by-ax=o$ an dem Circul.

V. $y^2-x^2+by-ax=o$ an der gleichseitigen Hyperbel

VI. $y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}by-ax=o$ an der ungleichseitigen Hyperbel.

VII. $y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}by-ax=o$ an der Ellipsi.

I. Wenn man demnach mit dem Parameter a eine Parabel DCM beschreibet; so ist der erste Ort beschrieben und $DQ=x$, $QM=y$. Tab. VII. Fig. 59.

Für den Circul ist (§. 362.).

$-2r=o$, $-2n=-b$, $-2p=-a$, $n^2+p^2=m^2$

q | $n=\frac{1}{2}b$ | $p=\frac{1}{2}a$, $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2)}=m$

$r=o$, $q=\int$

Tra-

Tab. VII. Fig. 60. Traget also auf eine gerade Linie BG aus C in K, $\frac{1}{2}a$, richtet in K das Perpendicul KD $=$ $\frac{1}{2}b$ auf; so ist CD $= \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$ der Radius des Circuls DBMG und darinnen QD $=$ x, QM $= y$.

Tab. VII. Fig. 59. Weil nun der Punct D in den Scheitel-Punct der Parabel fället; so richtet auf der Axe DQ die Linie DK $= \frac{1}{2}b$ perpendicular auf, ziehet aus K die Linie KG mit DQ parallel, machet KC $= \frac{1}{2}a$, und beschreibet aus C durch D den Circul DBMG; so ist DQ $= x$ und QM $= y$ in dem gegebenen Falle.

Wenn man in der Gleichung $xy = ab$ vor x seinen Werth $y^2 : a$ aus der Gleichung $ax = y^2$ setzet: so bekommt man $y^3 = a^2b$, oder $y^3 - a^2b = o$. Und diese Gleichung dienet füglich zu erweisen, daß die Linie y recht gefunden worden. Denn weil DK $= \frac{1}{2}b$ und KC $=$ $\frac{1}{2}a$; so ist $DC^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$ (§. 172. *Geom.*). Wiederum weil QM $= y$ und der Parameter von der Parabel $= a$; so ist DQ $=$ KP $=$ $y^2 : a$ (§. 222.) und daher $CP = y^2 : a - \frac{1}{2}a$, hingegen PM $= y - \frac{1}{2}b$, folgends

$$CP^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}aa$$

$$PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}bb$$

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} - by + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$$

CM²

$$CM^2 = CD^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$y^4 - by = 0$$

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{by}{a^2} = 0$$

$$y : a^2$$

$$y^3 - a^2 b = 0$$

II. Für die Ellipsin ist (§. 361.).

$$-2r = 0 \qquad t = \tfrac{1}{2} \qquad -2n = -\tfrac{1}{2}b$$

$$\frac{q}{2m} \qquad\qquad n = \tfrac{1}{4}b$$

$$r = 0, q = \int$$

$$t : 2m = 1 : 2$$

$$-2tp = -a \qquad n^2 - tm^2 + tp^2 = 0$$

$$\frac{2m}{p = a} \qquad \frac{2m \quad 2m}{\tfrac{1}{16}b^2 - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{2}a^2 = 0}$$

$$\tfrac{1}{16}b^2 + \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$

$$\tfrac{1}{8}b^2 + a^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{8}b^2 + a^2)} = m = t$$

Demnach ist (§. 247.) die halbe kleine Axe $= \sqrt{(\tfrac{1}{16}b^2 + \tfrac{1}{2}a^2)}$.

Machet $BC = a$ und richtet $AB = \tfrac{1}{4}b$ darauf perpendicular auf; so ist $AC = \sqrt{(\tfrac{1}{16}b^2 + a^2)}$. Tab. VII. Fig. 61. Richtet ferner auf AC die Linie $AD = \tfrac{1}{4}b$ perpendicular auf; so ist $DC = \sqrt{(\tfrac{1}{8}b^2 + a^2)}$, das ist, die halbe grosse Axe.

Tab. VII. Fig. 62. Gleichergestalt richtet auf $EF = \frac{1}{4}b$, $EG = \frac{1}{2}a$ perpendicular auf; so ist $GF = \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$. Richtet ferner $GH = \frac{1}{2}a$ auf GF perpendicular auf; so ist $FH = \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)}$, das ist, die halbe kleine Axe.

Tab. VII. Fig. 63. Traget nun auf die Linie AB aus A in E und aus E in B die halbe grosse Axe: ziehet durch E die Linie HI auf AB perpendicular, und machet EH und EI der halben kleinen Axe gleich; so könnet ihr (§. 257.) die Ellipsin AHBI beschreiben. Machet ferner $EL = a$ und ziehet $LD = KL = \frac{1}{4}b$ auf AB perpendicular, hingegen KG und DF mit AB parallel. Endlich traget auf KG aus K in C $\frac{1}{2}a$ und beschreibet aus C durch D einen Circul; so ist abermahl $DQ = x$ und $QM = y$. Denn weil $PM = y - \frac{1}{4}b$; so ist $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Wiederum weil $EP = x - a$, $AE = \sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)} = m$, folgends $AP = m + x - a$ und $PB = m - x + a$; so ist $AP.PB = m^2 + 2ax - x^2 - a^2 = \frac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2$. Derowegen da $AP.PB : PM^2 = 2m : t = 2 : 1$ (§. 239.); so ist

$$\frac{2y^2 - by + \frac{1}{8}b^2 = \frac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2}{y^2 - \frac{1}{2}by = ax - \frac{1}{2}x^2}$$

Im Circul wird gefunden $y^2 - by = ax - x^2$. Wenn ihr diese beyde Gleichungen von einander abziehet; so bleibet übrig $-\frac{1}{2}by = -\frac{1}{2}x^2$. Demnach ist $by = x^2$, folgends $y : x = x : b$. Wenn ihr ferner für x^2 in der

Gle

Gleichung für den Circul by setzet; so bekommt ihr $y^2 = ax$, folgends $a : y = y : x$. Und solchergestalt sind die Linien DQ und QM richtig gefunden worden.

III. Für die gleichseitige Hyperbel ist (§. 363.).

$$\frac{2r = 0,\quad -t = -1,\quad -2n = b2,\quad p = -a}{\frac{q}{r = 0,\ q = \int,}\qquad \frac{2m}{t = 2m}\qquad \frac{}{n = -\frac{1}{2}b}\qquad \frac{}{p = -\frac{1}{2}a}}$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2$$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)}$$

Weil $\frac{1}{4}b^2$ von $\frac{1}{4}a^2$ abgezogen werden muß; so müsset ihr hier für b die kleine und für a die grosse Linie annehmen, und solches auch bey dem Circul in acht nehmen, daß nemlich die Linien CK und KD mit einander verwechselt werden. Wenn ihr dieses in acht nehmet; so könnet ihr die verlangte Linien vermittelst der Hyperbel folgendergestalt finden. Ueber $AB = \frac{1}{2}b$ beschreibet einen halben Circul. Darein traget $BC = \frac{1}{2}a$; so ist $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ oder wenn a die grosse, b die kleine heissen solte, $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, das ist, die halbe Axe.

Tab. VII. Fig. 60.

Tab. VII. Fig. 64.

Tab. VII. Fig. 65. 60.

Traget nun auf eine gerade Linie aus G in A und B die halbe Axe, richtet in A die Linie AI = AG perpendicular auf, und beschreibet aus dem Mittelpuncte G durch I einen halben Circul FIf; so sind in F und f die Brennpuncte (§. 265.) und ihr könnet die Hyperbel (§. 271.) beschreiben. Wenn dieses geschehen, so machet $EG = \frac{1}{2}b$, richtet in E die Perpendicularlinie EK auf, und machet $ED = DK = \frac{1}{2}a$. Ziehet durch D und K die Linien DQ und KP mit der Axe AL parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}b$, und beschreibet aus C durch D einen Circul. Endlich ziehet aus M die halbe Ordinate LM; so ist $DQ = x$, $QM = y$.

Denn $LM = y + \frac{1}{2}a$, $EA = GE - AG = \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ oder $EA = \frac{1}{2}b - m$ und daher $AL = EA + EL = x + \frac{1}{2}b - m$, $BL = x + \frac{1}{2}b + m$. Also ist $LM^2 = y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2$ und $AL \cdot LB = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - m^2 = x^2 + bx + \frac{1}{4}a^2$. Also ist

$$y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = x^2 + bx + \frac{1}{4}a^2 \text{ (§. 290.)}$$

$$y^2 + ay = x^2 + bx$$

Im Circul $y^2 - ay = bx - x^2$ *Subtr.*

demnach $2ay = 2x^2$

$$ay = x^2$$

folgends $y : x = x : a$

Setzet

Setzet ferner in der Gleichung für den Circul ay für x^2; so bekommt ihr

$$\frac{y^2 - ay = bx - ay}{}$$

das ist $\frac{y^2 = bx}{}$

folgends $b : y = y : x$

IV. Auf eben diese Art kan man durch die ungleichseitige Hyperbel der Aufgabe eine Gnüge thun. Wollet ihr aber

V. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gebrauchen; so richtet HD auf DI perpendicular auf, machet $DE = a$ und $EL = b$; theilet EL in zwey gleiche Theile in N oder machet $DK = \frac{1}{2}b$ und ziehet KN mit DE parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}a$ und beschreibet aus C durch D den Circul DELM. Endlich beschreibet auch durch L die Hyperbel TLMS, und aus M, wo sie den Circul durchschneidet, ziehet QM mit DH oder auch PM mit DQ parallel; so ist $DQ = PM = x$, $DP = QM = y$. Denn vermöge der Hyperbel ist (§. 281.). Tab. VII. Fig. 66. 60.

$$DE : DP = PM : EL$$
$$a : y = x : b$$

daher $y - a : a = b - x : x$

und $y - a : b - x = a : x$ (§. 142.)

Vermöge des Circuls ist $y^2 - ay = bx - x^2$

und daher

$$y - a : b - x = x : y$$

daher $a : x = x : y$

Es ist aber auch $a : x = y : b$

Derowegen $x : y = y : b$.

Zusatz.

169. Wenn die Seite eines Würfels a ist, die Seite des doppelten Würfels $= y$; so ist $2a^3 = y^3$, oder, wenn $2a = b$, $a^2 b = y^3$. Also muß man zwischen der Seite des Würfels und der doppelten Seite zwey mittlere Proportionallinien suchen; so ist die erste davon die Seite des doppelten Würfels.

Die 137. Aufgabe.

Tab. VIII. Fig. 67.

370. Eine gerade Linie AB, die nach Belieben in C getheilet worden, noch ferner in D dergestalt zu theilen, daß $CD : DB = AC^2 : CD^2$.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$; so ist $DB = b - y$, folgends, weil $CD : DB = AC^2 : CD^2$,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Setzet $a : y = y : x$

so ist 1. $y^2 = ax$

und $y : b - y = a^2 : ax$

$= a : x$ (§. 142.)

II. $xy = ab - ay$

Ferner $y^2 : by - y^2 = a : x$ (§. 142.)

$ax : by - y^2 = a : x$

$x : by - y^2 = 1 : x$

III. $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$

IV. $x^2 + ax = by$

$ax = y^2$

V. $x^2 + 2ax = y^2 + by$

und $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$

Also bekommt man Gleichungen an folgenden Oertern, nemlich

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $xy + ay - ab = o$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

III. $y^2 + x^2 - by = o$ an dem Circul.

IV. $x^2 + ax - by = o$ an der äusseren Parabel

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = o$ an der gleichseitigen Hyperbel

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = o$ an der Ellipsi.

Tab. VIII. Fig. 68. Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel; so ist $DQ = x$, $QM = y$.

Für den Circul ist (§. 362.).

$$\frac{2r = 0 \qquad -2n = -b \qquad -2p = 0}{\frac{q}{r = 0, q = \int} \qquad \frac{}{n = \frac{1}{2}b} \qquad \frac{}{p = 0}}$$

$$\frac{n^2 - m^2 + p^2 = 0}{\frac{n^2 = m^2}{\frac{\frac{1}{4}b^2 = m^2}{\frac{1}{2}b = m}}}$$

Tab. VIII. Fig. 69. Wenn ihr demnach mit $AC = \frac{1}{2}b$ einen Circul beschreibet, und CD auf AB perpendicular aufrichtet; DL aber mit AB parallel ziehet; so ist ein jedes $DQ = x$ und ein jedes $QM = y$. Denn $PM = y - \frac{1}{2}b$, $AP = \frac{1}{2}b + x$, $PB = \frac{1}{2}b - x$. Daher $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$ und $AP \cdot PB = \frac{1}{4}b^2 - x^2$, folgends

$$\frac{y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 - x^2}{\frac{y^2 - by = -x^2}{y^2 + x^2 - by = 0}}$$

Tab. VIII. Fig. 68. Damit ihr nun x und y in unserem Falle findet; so setzet den Circul und die Parabel zusammen, dergestalt, daß der Punct D in

den

den Scheitel der Parabel, und DL auf ihre Axe fället. Nemlich richtet in D auf die Axe DR ein Perpendicul $DC = \frac{1}{2}b$ auf, und beschreibet aus C durch D den Circul; so ist DQ $= x$ und QM $= y$ in unserem Falle.

Denn $DQ = CS = y^2 : a$ und $SM = y - \frac{1}{2}b$, $CM = \frac{1}{2}b$. Derowegen weil $CM^2 = CS^2 + SM^2$, und $CM^2 = \frac{1}{4}b^2$, $CS^2 = y^4 : a^2$ $SM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$; so ist

$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{y^4}{a^2} + y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{y^4}{a^2} + y^2 - by = 0$$

$$y^4 + a^2y^2 - a^2by = 0$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

daher $b - y : y = y^2 : a^2$

Weil die Gleichung der gegenwärtigen Aufgabe gar wenig unterschieden ist von derjenigen, die wir oben durch alle Kegelschnitte construiret (§. 368.); so wollen wir die übrigen Kegelschnitte übergehen.

Die 138. Aufgabe.

371. Einen rechtwinklichten Triangel zu beschreiben, davon das eine Stück CB von der grösten Seite gegeben wird, welches der Perpendicul CD abTab. VIII. Fig. 70.

schneidet, der aus dem rechten Winkel D gefället wird, und zwar von der Beschaffenheit, daß die Summe der Quadrate von dem anderen Stücke AC und dem Perpendicul CD nebst einem Rectangulo aus dem Perpendicul CD in eine gegebene Linie FG gleich sey dem Rectangulo aus dem Stücke BC in das andere Stücke AC, und eine gegebene Linie HI.

Auflösung.

Es sey $BC = a$, $FG = b$, $HI = c$, $AC = x$, $CD = y$; so ist

$$CB : DC = DC : AC$$
$$a : y = y : x$$

I. $ax = y^2$

$$AC^2 + CD^2 + CD.FG = BC.(AC + HI)$$
$$x^2 + y^2 + by = ax + ac$$

II. $y^2 + by = ax + ac - x^2$

daher $ax + by = ax + ac - x^2$

III. $by = ac - x^2$

$$\tfrac{1}{2}by = \tfrac{1}{2}ac - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$y^2 + by = ax + ac - x^2$$

IV. $y^2 + \tfrac{2}{2}by = ax + \tfrac{2}{2}ac - \tfrac{2}{2}x^2$

$$y^2 = ax$$

$$by = ac - x^2$$

V. $y^2 - by = ax - ae + x^2$

Wir haben demnach Gleichungen für folgende Oerter:

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $y^2 + x^2 + by - ax - ac = o$ an dem Circul.

III. $x^2 + by - ac = o$ an der äusseren Parabel.

IV. $y^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}by - ax - \frac{3}{2}ac = o$ an der Ellipsi.

V. $y^2 - x^2 - by - ax + ac = o$ an der Hyperbel.

Wenn man in dem Orte an der äusseren Parabel $x^2 + by - ac = o$ für x^2 seinen Werth $y^4 : a^2$ setzet; so bekommt man

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = o$$

daher $y^4 + a^2by - a^3c = o$

Woraus zu ersehen, daß man eine biquadratische Gleichung zu construiren hat.

I. Wenn man mit dem Parameter a eine Parabel beschreibet; so ist der Ort an der Parabel vorhanden.

II. Für den Ort an dem Circul ist

$$\frac{2r = 0}{q} \qquad \frac{-2n = b}{n = -\frac{1}{2}b} \qquad \frac{-2p = -a}{p = \frac{1}{2}a}$$

$$r = 0, q = \int$$

$$\frac{n^2 + p^2 - m^2 = -ac}{n^2 + p^2 + ac = m^2}$$

$$\frac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ac = m^2}{\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ac)} = m}$$

Tab. VIII. Fig. 71. Machet demnach RI $= \frac{1}{2}b$ und richtet in I perpendicular auf HI $= \frac{1}{2}a$; so ist HR $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$. Verlängert RH in L bis RL $= a$, und in O, bis RO $= c$. Beschreibet über OL einen halben Circul; so ist der Perpendicul CR $= \sqrt{ac}$ (§. 210. *Geom.*), folgends CH $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb + ac)}$ der Radius des Circuls. Wenn ihr also aus C mit CH den Circul beschrieben und durch C die Linie AB mit OL parallel gezogen; so machet CK $= \frac{1}{2}a$. Richtet in K das Perpendicul KD $= \frac{1}{2}b$ auf, und ziehet die Linie DQ mit AB parallel; so ist der Ort an dem Circul beschrieben, und der Punct D der Ursprung von x, hingegen y wird bis an die Linie DQ gezogen.

Wenn ihr nun ferner damit den Ort in der Parabel verknüpfen, und dadurch x und y in dem gegebenen Falle determiniren wollet; so nehmet DQ für die Axe an und beschreibet darum mit dem Parameter a die Parabel.

Wo

Wo sie den Circul durchschneidet, nemlich aus dem Puncte M, lasset einen Perpendicul QM auf die Linie DQ fallen; so ist $DQ = x$, $Qm = y$. Machet ihr nun $QS = a$ und ziehet die Linien DM und SM; so ist DMS der verlangte Triangel.

Denn $DQ = KP = \frac{y^2}{a}$ und daher $CP \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a$.

Ferner $PM = PQ + QM = \frac{1}{2}b + y$. Derowegen

$$CP^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}bb$$

$$CM^2 = \frac{y^2}{a^2} + by + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$CH^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + ac$$

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = 0$$

$$y^4 + a^2by - a^3c = 0$$

welches die biquadratische Gleichung ist, die man construiren sollen.

Wie diese Gleichung durch die übrige Kegelschnitte construiret wird, ist aus der 136. Aufgabe (§. 368.) abzunehmen.

Die

Die 139. Aufgabe.

372. Eine allgemeine Regel zu finden, alle cubische und biquadratische Gleichungen zu construiren.

Auflösung.

Tab. VIII. Fig. 72.

Es sey MAN eine Parabel und ihre Axe aO, mit welcher AP parallel, darauf DH perpendicular gezogen ist. Aus H als dem Mittelpuncte beschreibet durch A den Circul AMN. Nun sey AD $= b$, DH $= d$, AQ $= c$; so ist $AH^2 = dd + bb$. Es sey ferner PM $= x$, der Parameter der Parabel $= a$; so ist OM $= x + c$ und KM $= x + d$. Da nun (§. 233.).

$$a : OM + AQ = PM : AP (= QO)$$

$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a},$$

folgends $DP = HK = \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$;

so ist $HK^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} + bb$.

Und weil $KM^2 = x^2 + 2dx + dd$: so ist

$$x^4 + 4cx^3 + 4c^2x^2 - 2bx^2 - 4bcx + bb + x^2 + 2dx + dd = bb + dd,$$

das ist

x^4

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$
$$- \frac{2bx^2}{a} + 2dx$$
$$+ x^2$$

$$\frac{x}{a^2}$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0$$
$$- 2abx + 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Hieraus ist klar, daß, wenn das andere Glied das Mehrzeichen + hat, die wahren Wurtzeln zur Rechten fallen. Vergleichet demnach mit dieser Gleichung folgende $x^3 + px^2 \mp qx \mp r = o$; so findet ihr

$c = \frac{1}{4}p$; $4c^2 - 2ab + a^2 = q$ $4c^2 - 2ab + a^2 = -q$

$4c^2 + a^2 - q = 2ab$ $4c^2 + a^2 + q = 2ab$

$\frac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab$ $\frac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$

$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$ $\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a + \frac{q}{2a} = b$

$2a^2d - 4abc = r$ $2a^2d - 4abc = -r$

$2a^2d = 4abc + r$ $2a^2d = 4abc - r$

$d =$

$d = \frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2}$ $d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$

das ist,

das ist,

$d = \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2}$, $d = \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}$

Setzet nun $PN = x$, und das übrige bleibe wie vorhin; so ist $NR = PN - RP = PN - DH = x - d$, $NO = x - c$, $PM = x - 2c$, $NR^2 = x^2 - 2dx + d^2$ und, weil (§. 233.)

$$a : ON + AQ = PM : AP$$

$$a : x = x - 2c : \frac{x^2 - 2cx}{a}$$

auch daher $DP = HR = \frac{x^2 - 2cx}{a} - b$, demnach

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2$$

folgends, da $HN^2 = HR^2 + NR^2$ (§. 172. *Geom.*),

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2 + x^2 - 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} + \frac{4bcx}{a} = 0$$

$$- \frac{2bx^2}{a} - 2dx$$

$$+ x^2$$

$$\frac{x}{a^2}$$

$$x^3 -$$

$$x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc = 0$$
$$- 2abx - 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Hieraus erhellet, daß, wenn das andere Glied das Minderzeichen — hat, die wahren Wurtzeln zur Lincken fallen. Man vergleiche demnach mit der gefundenen Gleichung folgende $x^3 - px^2 \mp qx \mp r = 0$; so ist

$$-p = -4c, \quad 4c^2 - 2ab + a^2 = q \qquad 4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$

$$\tfrac{1}{4}p = c \qquad \tfrac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab \qquad \tfrac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$$

$$\frac{p^2}{8a} + \tfrac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b \qquad \frac{p^2}{8a} + \tfrac{1}{2}a + \frac{q}{2a} = b$$

$$4abc - 2a^2d = r \qquad 4abc - 2a^2d = -r$$

$$4abc - r = 2a^2d \qquad 4abc + r = 2a^2d$$

$$2bc - r = d \qquad 2bc + r = d$$

$$\frac{a}{} \quad \frac{}{2a^2} \qquad \frac{a}{} \quad \frac{}{2a^2}$$

$$\tfrac{1}{4}p \mp \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d, \qquad \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d$$

Also ist in allen vollständigen cubischen Gleichungen

$$AQ = \tfrac{1}{4}p$$
$$DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} \mp \frac{q}{2a}$$

$$DH = \tfrac{1}{4}p + \sqrt{\frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \mp \frac{r}{2a^2}}$$

Nemlich q hat allezeit in der Regel —, wenn es in der Gleichung + hat, und hingegen +, wenn hier — ist. Hingegen ist beständig $+r$, auſſer wenn in der Gleichung p und r verschiedene Zeichen haben.

Wenn einige Glieder in der Gleichung fehlen; so müssen auch aus der Gleichung alle weggelassen werden, darinnen die dazu gehörige Buchstaben zu finden. Z. E. Wenn das andere Glied fehlet, so ist $\frac{1}{4}p = o$, und daher $DA = \frac{1}{2}a \mp \frac{q}{2a}$ und $DH = \frac{r}{2a^2}$.

Wenn ihr das Quadrat von dem Radio des Circuls HM oder HN setzet $bb + dd \mp af$; so lässet sich die Gleichung auf keine cubische bringen, sondern sie bleibet biquadratisch. Wenn ihr nun damit die Gleichung $x^4 \mp px^3 \mp qx^2 \mp rx \mp s = o$ vergleichet; so bleibet alles, wie vorhin: nur wird gefunden

$$s = a^3 f \text{ und daher } s : a^3 = f.$$

Solchergestalt werden die biquadratischen Gleichungen durch eben diese Regel construiret; nur daß der Radius des Circuls ($= \sqrt{(bb + dd \mp af)}$) anders gefunden wird, wie bereits in einem Exempel in der vorhergehenden Aufgabe (§. 371.) gezeiget worden.

An-

Anmerckung.

373. Diese Regel nennet man insgemein die Bakerische Centrai=Regel, weil sie Thomas Baker, ein Engelländer, gefunden Ich halte es vor dienlich ihren Gebrauch durch folgende Aufgabe zu erläutern.

Die 140. Aufgabe.

374. In einem rechtwinklichten Triangel ABC wird gegeben das Stücke von der Hypotenuse BD, und das von der Grundlinie EC nebst dem Perpendicul AB: man soll die Seiten BC und AC finden. Tab. VIII. Fig. 73.

Auflösung.

Es sey $AB = a$ $DC = x$
$BD = b$ $AE = y$
$EC = c$ so ist $BC = b + x$
$AC = c + y$

$$CD : DB = CE : EA$$
$$x : b = c : y$$
$$xy = bc$$
$$y = bc : x$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$b^2 + 2bx + x^2 = a^2 + c^2 + 2cy + y^2$$
$$= a^2 + c^2 + \frac{2bc^2}{x} + \frac{b^2c^2}{x^2}$$

$$b^2x^2 + 2bx^3 + x^4 = a^2x^2 + c^2x^2 + 2bc^2x + b^2c^2$$
$$\text{das ist, } x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$
$$- a^2x^2$$
$$- c^2x^2$$

Nehmet a für den Parameter an, und beschreibet eine Parabel. Weil

$p = 2b$, $q = b^2 - a^2 - c^2$, $r = -2bc^2$, $s = -b^2c^2$; so ist in der Bakerischen Central-Regel.

Tab. VIII. Fig. 71.

$$AQ = \tfrac{1}{2}b, \quad DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{4b^2}{8a} - \frac{b^2}{2a} + \tfrac{1}{2}a + \frac{c^2}{2a}$$

$$= a + \frac{c^2}{2a}$$

$$DH = \tfrac{1}{2}b + \frac{8b^3}{16a^2} - \frac{2b^3}{4a^2} + \frac{2a^2b}{4a^2} + \frac{2bc^2}{4a^2} - \frac{2bc^2}{2a^2}$$

$$= b - \frac{bc^2}{2a^2}$$

Tab. VIII. Fig. 74. Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel, machet $aQ = \frac{1}{2}b$, und in der Linie PQ, welche mit der Axe parallel gezogen, $AD = a + \frac{c^2}{2a}$ die Perpendicularlinie

$DH = b - \frac{bc^2}{2a^2}$. Wie die Linien $c^2 : 2a$ und $bc^2 : 2a^2$ gefunden werden, ist aus den oben gefundenen Werthen von dergleichen Linien klar: nemlich $c^2 : 2a$ ist die halbe dritte Proportionallinie zu a und c, hingegen $bc^2 : 2a^2$ ist die vierte zu a, b und $c^2 : 2a$. Durch H und A ziehet die Linie CB und machet $AB = a$, $AC = b^2c^2 : a^3$, welches die vierte Proportional-

nallinie zu a, b und $bc^2 : a^2$ ist. Ueber CB beschreibet einen halben Circul, und richtet aus A den Perpendicul AE auf. Endlich beschreibet aus H mit HE einen Circul, welcher die Parabel in M durchschneidet; so ist $PM = x$.

Denn $AD^2 = a^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$

$DH^2 = b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$

$AH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$

und $EH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$

Ferner ist (§. 233.)

$a : OM + aQ = MP : PA$

$a : x + b = x : x^2 + bx$

daher $DP = HR = \frac{x^2 + bx}{a} - a - \frac{c^2}{2a}$

und weil $RM = x + b - \frac{bc^2}{2a^2}$, so ist

$RM^2 = x^2 + 2bx + bb - \frac{bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - 2x^2 - 2bx + a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}$$
$$- \frac{bc^2x}{a^2} + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$$

Wenn man nun von der Summe dieser beyden Quadrate das Quadrat von EH abziehet; so bleibet

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} = 0$$
$$- x^2$$
$$- c^2x^2$$
$$\frac{}{a^2}$$

übrig, und demnach ist

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$
$$- a^2x^2$$
$$- c^2x^2$$

Ende des ersten Theiles.

Der andere Theil
Von den
Anfangs-Gründen
der
Differential-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Differential-Rechnung ist eine Wissenschaft aus einer gegebenen endlichen Grösse eine unendlich kleine zu finden, deren unendliche zusammen genommen ihr gleich werden.

Anmerckung.

2. Der Herr Geheimde Rath von Leibnitz hat diese Rechnung gefunden. Es ist aber der tiefsinnige Geometra *Isaac Newton* in Engelland auf eben dergleichen Gedancken kommen, wie wohl er eine andere Manier hat, die unendlich kleinen Grössen zu bezeichnen, und auch die Rechnung selbst mit einem anderen Namen nennet, nemlich Methodum Fluxionum.

Die 2. Erklärung.

3. Eine unendlich kleine Grösse ist diejenige, welche so ein geringer Theil von der anderen ist, daß er mit ihr nicht verglichen werden kan.

Der 1. Zusatz.

4. Dannenhero ist sie in Ansehung derje-

nigen Grösse, mit welcher sie nicht verglichen werden kan, für nichts zu halten.

Der 2. Zusatz.

5. Folgends wenn eine unendlich kleine Grösse zu einer anderen addiret, oder von ihr subtrahiret wird, so ist in dem ersten Falle die Summe, in dem anderen die Differentz der gegebenen gleich zu achten, das ist, eine unendlich kleine Grösse kan eine endliche weder vermehren noch vermindern.

Die 1. Anmerckung.

6. Mercket aber wohl, daß eine unendlich kleine Grösse nur in Ansehung einer anderen für nichts zu achten; in sich aber nicht nichts ist. Denn bildet euch ein, ihr wollet die Höhe eines Berges messen, und indem ihr über der Arbeit begriffen wäret, jagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg um den Diameter eines Sandkörnleins niedriger worden. Allein da die Ausmessung der Höhe eines Berges so beschaffen ist, daß die Höhe einerley gefunden wird, ob das Sandkörnlein liegen bleibet, oder von dem Winde weggejaget wird: so kan man das Sandkörnlein in Ansehung eines grossen Berges für nichts und also seine Grösse in Ansehung der Höhe des Berges für unendlich klein halten. Dieses hat man schon längst überall in acht genommen, wo man die Geometrie bey cörperlichen Dingen in der Natur anbringet. Also setzen wir in der Astronomie, der Diameter der Erde sey in Ansehung der Weite von der Sonne und noch mehr der Fixsterne für einen Punct oder unendlich kleine zu halten, weil die erste Bewegung der Sterne sich eben so verhalten würde, wenn die Erde würcklich ein untheilbahrer Punct wäre. So hal-

ten

ten wir in den Mondfinsternissen die Erde für eine vollkommene Kugel, und also die Höhen der Berge in Ansehung des Diameters der Erde für unendlich kleine oder für nichts; weil der Schatten der Erde sich auf dem Monde nicht anders darstellen würde, wenn die Berge nicht da wären und die Erde die völlige Gestalt einer Kugel hätte. Da man nun auch in der Geometrie grossen Vortheil davon hat, wenn man die Grössen in unendlich kleine Theile in Gedancken theilet, das ist, in so kleine, die in Ansehung ihrer für nichts zu halten sind, indem man daraus die endlichen Grössen öfters determiniren, und ihre verborgene Eigenschaften auf die allerleichteste Manier finden kan: wer will es den Geometris verdencken, daß sie dergleichen vornehmen?

Die 2. Anmerckung.

7. Ihr wisset aus der gemeinen Geometrie, daß eine Linie beschrieben wird, weñ ein Punct sich durch einen gewissen Raum beweget; eine Fläche, wenn eine Linie; ein Cörper, wenn eine Fläche sich beweget. Also erwachsen die Grössen, indem unendlich viel kleine Theile nach einander anwachsen. Und in dieser Absicht nennet sie *Newton* Fluxionen oder Fluxiones.

Die 3. Erklärung.

8. Wenn die unendlich kleinen Grössen als der Unterschied zweyer endlichen angesehen werden, nennet man sie Differentialgrössen.

Die 4. Erklärung.

9. Differentiiren heisset die Differentialgrösse von einer gegebenen endlichen finden.

Die 5. Erklärung.

10. Die Grössen, welche immer wachsen oder abnehmen, indem andere un-

verändert bleiben, heissen veränderliche; die anderen aber unveränderliche Grössen. Also sind in einer Parabel die Abscissen und Semiordinaten veränderliche Grössen, der Parameter aber ist eine unveränderliche. Denn indem jene beyden beständig wachsen, bleibet dieser unverändert (§. 217. *P. I.*).

Zusatz.

11. Da nun die Differentialgrössen die unendlich kleinen Theile sind, welche nach und nach anwachsen, indem sie erzeuget werden (§. 7. 8.); so haben die unveränderlichen Grössen keine Differentialgrösse.

Der 1. willkührliche Satz.

12. Nennet die veränderlichen Grössen mit den letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z; die unveränderlichen aber mit den ersten, a, b, c.

Der 2. willkührliche Satz.

13. Die Differentialgrösse von x nennet dx, die von y nennet dy und so weiter.

Der 1. Zusatz.

14. Also ist da, oder db, oder $dc = 0$ (§. 11.).

Der 2. Zusatz.

15. Und die Differentialgrösse von $x + y - a$ ist $dx + dy$; die von $x - y + a$

aber

aber $dx - dy$. Demnach ist es leicht die Grössen, welche zu einander addiret, oder von einander subtrahiret sind, zu differentiiren.

Die 1. Aufgabe.

16. Zwey Grössen die einander multipliciren, als xy zu differentiiren.

Auflösung.

1. Multipliciret die Differentialgrösse der einen veränderlichen Grösse in die andere veränderliche Grösse.
2. Die beyden Producte addiret zusammen, so kommt die Differentialgrösse von xy heraus $xdy + ydx$.

Beweiß.

Lasset x und y um ihre halbe Differentialgrösse vermehret und vermindert werden, so kommt im ersten Falle $x - \frac{1}{2}dx$ und $y - \frac{1}{2}dy$, im anderen Falle $y + \frac{1}{2}dy$ und $x + \frac{1}{2}dx$. Multipliciret beyde durch einander in beyden Fällen, so bekommt ihr $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$ und $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. Wenn ihr beyde Producte von einander abziehet, so bleibet für die Differentialgrösse des Rectanguli xy übrig $xdy + ydx$. W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

17. Wenn viel Grössen einander multi-

pli-

pliciren, so dörfet ihr nur zwey oder mehre nach einander als eine ansehen, und ihr könnet sie nach der gegebenen Regel differentiiren. Z. E. Es sey xyv zu differentiiren, so ist die Differentialgrösse $xydv + xvdy + yvdx$. Denn es sey $xy = t$, so ist $xyv = tv$, folgends $d(xyv) = tdv + vdt$. Nun ist $dt = xdy + ydx$. Derowegen wenn ihr für t und dt die gehörigen Werthe setzet, so findet ihr $tdv + vdt = xydv + vxdy + vydx$.

Der 2. Zusatz.

18. Dannenhero findet ihr ferner die Differentialgrösse einer Potentz, wenn ihr ihren Exponenten um 1. vermindert, und alsdenn die erniedrigte Potentz in ihren unveränderlichen Exponenten, und die Differentialgrösse der Wurtzel multipliciret. Nemlich $d(x^2) = 2xdx$, $d(x^3) = 3x^2dx$ und überhaupt $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Der 3. Zusatz.

19. Die Differentialgrösse von ay ist $ady + yda$. Nun ist $da = o$ (§. 14.). Derowegen ist $d(ay) = ady$.

Der 4. Zusatz.

20. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42. *Part. I.*), so ist die Differentialgrösse von einer Irrationalgrösse $(n:m)$

$(n:m)x^{n:m-1}dx = (n:m)x^{(n-m):m}dx = (n:m)\sqrt[m]{x^{m-n}dx}$.

Der 5. Zusatz.

21. Wiederum weil $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$ und überhaupt $1:x^m = x^{-m}$, so ist die Differentialgrösse von $1:x$, und $1:x^2$, in gleichen $1:x^m = -x^{-2}dx$, $-2x^{-3}dx$ und $-mx^{-m-1}dx$.

Anmerckung.

22. Daß $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$, $1:x^3 = x^{-3}$ u. s. w. könnet ihr bald begreifen, wenn ihr nur bedencket, es gehen die Exponenten in einer arithmetischen Verhältniß fort, indem die Dignitäten in einer geometrischen fortschreiten. Nun seyn die Dignitäten $x^2.x.1.1:x.1:x^2.1:x^3$, so sind die Exponenten 2. 1. 0. −1. −2. −3. Und daher ist eben $x^0 = 1$.

Der 6. Zusatz.

23. Endlich weil $1:\sqrt[m]{x} = 1:x^{1:m} = x^{-1:m}$ $1:\sqrt[m]{x^3} = 1:x^{3:m} = x^{-3:m}$ und überhaupt $1:\sqrt[m]{x^n} = 1:x^{n:m} = x^{-n:m}$; so sind die Differentialgrössen von dergleichen Grössen $-\frac{1}{m}x^{-3:m}dx$, $-\frac{3}{2}x^{-5:2}dx$ und überhaupt $-(n:m)x^{-n:m-1}dx = -(n:m)x^{(-n-m):m}dx = -n\,dx : m\sqrt[m]{x^{n+m}}$.

Die

Die 2. Aufgabe.

24. Zwey Grössen, die einander dividiren, $x : y$ zu differentiiren.

Auflösung.

Es sey $x : y = v$

so ist $x = vy$

$dx = vdy + ydv$ (§. 16.).

$dx - vdy = ydv$

das ist, $dx : y - xdy : y^2 = dv$
oder $(ydx - xdy) : y^2 = dv$

Regel.

(1) Multipliciret die Differentialgrösse des Zählers in den Nenner, und (2) des Nenners in den Zähler. (3) Ziehet das letzte Product von dem ersten ab. (4) Das übrige dividiret durch das Quadrat des Nenners.

Zusatz.

25. Wenn im Zähler und Nenner viel veränderliche Grössen enthalten sind, so könnet ihr sie gleichfals nach den gegebenen Regeln differentiiren, wenn ihr zwey als eine ansehet. Denn es sey $xy : vz$ zu differentiiren. Setzet $xy = t$ und $vz = s$; so ist $d(xy : vz) = (sdt - tds) : s^2$. Nun ist $dt =$

xdy

$xdy + ydx$ und $df = vdz + zdv$ (§ 16.). Derowegen ist $fdt - tdf = vzxdy + vzydx - vxydz - xyzdv$, folgends $d(xy:vz) = (vzxdy + vzydx - xyzdv - xyvdz) : v^2z^2$.

Die 1. Anmerckung.

26. Wie wir die Regel in der Division gefunden, hättet ihr auch alle Regeln finden können, die in dem 4. 5. und 6. Zusatze der vorhergehenden Aufgabe auf eine andere Art hergeleitet worden: Denn setzet

$$\sqrt[m]{x^n} = v$$

so ist $x^n = v^m$

$$nx^{n-1}dx = mv^{m-1}dv \text{ (§. 18.).}$$

$$nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = dv$$

Nun ist $v^{m-1} = v^m : v = x^n : \sqrt[m]{x^n}$, folgends

$$nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = nx^{n-1}dx\sqrt[m]{x^n} : mx^n =$$

$$(n:m)x^{-1}dx\sqrt[m]{x^n} = (n:m)\,x^{-1}x^{n:m}dx =$$

$(n:m)\,x^{n:m-1}dx$, wie ihr es (§. 20.) gefunden.

Die 2. Anmerckung.

27. Damit ihr den Nutzen der Differentialrechnung in der höheren Geometrie sehet, so muß ich zeigen, wie die Eigenschaften der krummen Linien dadurch erfunden werden.

Von

Von den Tangentibus der krummen Linien oder den geraden Linien, die sie berühren.

Die 6. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 75.

28. Weil der Punct, so die krumme Linie beschreibet, in seiner Bewegung seine Direction beständig ändert (§. 2. 8. *Geom.*): so kan man sich die krummen Linien vorstellen, als wenn sie aus unendlich kleinen geraden Linien zusammen gesetzt, und daher ein Polygon von unzählich unendlich kleinen Seiten wären. Wenn ihr nun setzet, daß eine von diesen Seiten Mm in eine endliche gerade TM verlängert wird; so ist selbige der Tangens der krummen Linie.

Zusatz.

29. Derowegen zeiget der Tangens die Direction, welche der Punct, so die krumme Linie beschrieben, an jedem Theile derselben gehabt.

Die 7. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 76.

30. Der SUBTANGENS ist die Linie PT, welche zwischen dem Tangente TM und der Semiordinate PM enthalten ist.

Die 8. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 75.

31. Wenn ihr in dem Puncte der Berührung M eine Perpendicular-Linie MH aufrichtet, bis sie die Axe in H erreichet, so heisset sie die Normal-Linie

der

der Theil der Axe aber PH, welcher zwischen ihr und der Semiordinate PM lieget, die Subnormal-Linie.

Die 3. Aufgabe.

32. In einer jeden gegebenen algebraischen Linie den zu einem gegebenen Puncte gehörigen Subtangentem zu finden. Tab. IX. Fig. 75.

Auflösung.

Setzet die Semiordinate pm der anderen PM unendlich nahe, und ziehet MR mit der Axe AH parallel, so ist MR = Pp (§. 22. *Geom.*). die Differential der Abscisse AP, mR die Differential der Semiordinate PM (§. 8.). Weil nun PM mit *pm* parallel ist, so ist der Winkel MmR dem Winkel TMP gleich (§. 97. *Geom.*). folgends, da bey R und P rechte Winkel sind, mR : MR = PM : PT, (§. 183. *Geom.*). Setzet nun PM = y, PA = x, so ist MR = dx, mR = dy (§. 13.), folgends $dy : dx = y : PT$, und demnach $PT = ydx : dy$. Wenn ihr nun den Werth von dx aus der Æquation substituiret, welche die Natur einer krummen Linie insbesondere erkläret; so verschwindet dx und dy, und kommt der Subtangens TP in lauter endlichen Grössen heraus.

Der 1. Zusatz.

33. Es sey $ax = y^2$, so ist $adx = 2ydy$, $dx = 2ydy$ *a*, folgends $PT = ydx : dy = 2y^2 dy$:

$ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$. Derowegen ist in der Parabel der Subtangens TP zu der Abscisse AP wie 2 zu 1.

Der 2. Zusatz.

34. Es sey für unendliche Parabeln $a^{m-1} x = y^m$, so ist

$$\frac{a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \text{ (§. 18.).}}{dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1} dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1} x : a^{m-1} = mx$$

Wenn also $m = 3$, so ist $PT = 3x$, das ist, in der Parabel von dem anderen Geschlechte ist $PT : AP = 3 : 1$ &c.

Der 3. Zusatz.

35. Es sey $a^n x^r = y^m$, so ist

$$\frac{ra^n x^{r-1} dx = my^{m-1} dy \text{ (§. 18.).}}{dx = my^{m-1} dy : ra^n x^{r-1}}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : ra^n x^{r-1} dy = my^m : ra^n x^{r-1} = ma^n x^r : ra^n x^{r-1} = mx : r.$$

Setzet z. E. $a^3 x^2 = y^5$, so ist $PT = \frac{5}{2}x$, das ist, $PT : AP = 5 : 2$.

Der 4. Zusatz.

36. In dem Circul ist $ax - xx = yy$, und demnach

adx

$$\frac{adx - 2xdx = 2ydy}{dx = 2ydy : (a - 2x)}$$

PT $= ydx : dy = 2y^2dy : (a - 2x)dy = 2y^2 : (a - 2x) = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x)$. Solchergestalt ist $\frac{1}{2}a - x : a - x = x :$ PT.

Weil PT $= (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x)$; so ist AT $= (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - xx - \frac{1}{2}ax + xx) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$, folgends $a - 2x : a = x :$ AT.

Der 5. Zusatz.

37. Es sey für unendliche Circul (§. 259. P. I.). Tab. IX. Fig. 75.

$$\frac{ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}}{}$$

so ist $max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy$

$$\frac{}{dx = (m+1)y^m dy : (max^{m-1} - (m+1)x^m)}$$

PT $= ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$. Demnach ist AT $= (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x)$.

Es sey ein Circul von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2$, also AT $= ax : (2a - 3x)$ und PT $= (3ax - 3x^2) : (2a - 3x)$.

Der 6. Zusatz.

38. In der Ellipsi ist $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 239. P. I.) und daher

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$dx = 2aydy : (ab - 2bx)$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2dy : (ab - 2bx)dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$. Daher ist $AT = (2ax - 2x^2 : (a - 2x) - x = (2ax - 2x^2 - ax + 2x^2) : (a - 2x) = ax : (a - 2x)$ wie im Circul (§. 36.).

Der 7. Zusatz.

39. Für unendliche Ellipses ist (§. 258. P. I.)

$$ay^{m+n} = bx^m(a - x)^n \text{ und daher}$$

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a - x)^n dx - nbx^m(a - x)^{n-1}dx$$

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy : (mbx^{m-1})(a - x)^n - nbx^m(a - x)^{n-1} = dx$$

$PT = ydx : dy = (m+n)ay^{m+n} : (mbx^{m-1}(a - x)^n - nbx^m(a - x)^{n-1} = (mbx^m(a - x)^n + nbx^m(a - x)^n) : mbx^{m-1}(a - x)^n - nbx^m(a - x)^{n-1}) = (\text{wenn ihr mit } bx^{m-1} \text{ und } (a - x)^{n-1} \text{ dividiret}) (m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx)$.

Derowegen ist $AT = (m+n)(ax - xx) : (ma - mx - xx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max$

$max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax :$
$(ma - mx - nx)$.

Es sey z. E. eine Ellipsis von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2, n = 1$ (§. 258. *P. I.*) $PT = (3ax - 3xx) : (2a - 3x)$, $AT = ax :$
$(2a - 3x)$.

Der 8. Zusatz.

40. Für eine Hyperbel ist $ay^2 = abx + bxx$ (§. 260. *P. I.*) und daher findet ihr (wie §. 38.) $PT = (2ax + 2xx) : (a + 2x)$ und $AT = ax :$
$(a + 2x)$.

Der 9. Zusatz.

41. Für unendliche Hyperbeln ist $ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$ (§. 286. *P. I.*). Derowegen findet ihr (wie §. 39.) $PT = (m + n, (ax + xx) :$
$(ma + mx + nx)$ und $AT = nax : (ma + mx +$
$nx)$.

Der 10. Zusatz.

42. Für eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy = aa$ (§. 284. *P. I.*).

Daher $xdy + ydx = o$ (§. 14. 16.).

$ydx = -xdy$

$PT = ydx : dy = -xdy : dy = -x$.

Also ist der Subtangens der Abscisse gleich, muß aber, weil $-x$ ist, ihrem Ursprunge entgegen gesetzet werden, das ist, wenn

der Punct, wovon die Abscissen gerechnet werden, zur Lincken der Semiordinate ist, so wird der Subtangens auf der Axe zu ihrer Rechten genommen.

Der 11. Zusatz.

43. Für unendliche Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten ist $a^{m+n} = y^m x^n$ (§. 285. *P. I.*).

Daher $o = mx^n y^{m-1} dy + nx^{n-1} y^m dx$

$-mx^n y^{m-1} dy : nx^{n-1} y^m = dx$

$PT = ydx : dy = -mx^n y^m : nx^{n-1} y^m = -\frac{mx}{n}$

Es sey eine Hyperbel von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2$, $n = 1$, $PT = -2x$.

Der 12. Zusatz.

44. Endlich weil für alle Algebraische Linien (§. 214. *P. I.*).

$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = o$, so ist

$may^{m-1} dy + nbx^{n-1} dx + rcy^{r-1} x^s dy + scy^r x^{s-1} dx = o$

$nbx^{n-1} dx + scy^r x^{s-1} dx = -may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy$

$dx = (-may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1})$

PT

$PT = ydx : dy = (-may^m - rcy^r x^s) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1})$, nach welcher Regel aller Algebraischen Linien Subtangentes gefunden werden, wenn ihr für die undeterminirte Buchstaben a, c, b und die Exponenten m, n, r, s ihren Werth aus ihrer Gleichung setzet. Z. E. Weil für die Parabel vom ersten Geschlechte

$ax = y^2$, oder $y^2 - ax = o$, so ist

$ay^m = y^2$	$bx^n = -ax$	$cy^r x^s = o$	$f = o$
$a = 1, m = 2,$	$b = -a, n = 1,$	$c = o, r = o, s = o$	

daher $PT = (-2.1y^2 - o.oy^o x^o) : (-1.a x^{1-1} + o.oy^o x^{o-1}) = -2y^2 : -a = 2ax : a = 2x$.

Wiederum es sey $y^3 - x^3 - axy = o$, so ist

$ay^m = y^3,$	$bx^n = -x^3,$	$cy^r x^s = -axy,$	$f = o$
$a = 1, m = 3,$	$b = -1, n = 3,$	$c = -a, r = 1, s = 1$	

daher $PT = (-3.1y^3 - 1.-ayx) : (3.-1 x^{3-1} + 1.-ayx^{1-1}) = (-3y^3 + axy) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - ayx) : (3x^2 + ay)$: folgends $AT = (3y^3 - ayx) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay) = axy : (3x^2 + ay)$. Denn da $y^3 - x^3 = axy$; so ist $3y^3 - 3x^3 = 3ayx$.

Der 13. Zusatz.

45. Weil $PT = ydx : dy$, $PM = y$; so ist $TM = \sqrt{(y^2 dx^2 : dy^2 + y^2)} = \sqrt{((y^2 dx^2 + y^2 dy^2) : dy^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2) : dy}$.

Die 4. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75.

46. Die Subnormallinie PH in einer Algebraischen Linie zu finden.

Auflösung.

Weil der Triangel TMH bey M rechtwinklicht ist, so ist $TP : PM = PM : PH$ (§. 210. *Geom.*). $(ydx : dy) : y = y : PH$.

Derowegen $PH = y^2 dy : ydx = ydy : dx$. Wenn ihr demnach aus der Gleichung für eine besondere Linie den Werth von dy durch x exprimiret; so bekommet ihr die Subnormallinie, wie vorhin den Subtangentem, in lauter endlichen Grössen.

Der 1. Zusatz.

47. Es sey $ax = y^2$,

so ist $adx = 2ydy$

$\frac{1}{2}adx = ydy$

$PH = ydy : dx = adx : 2dx = \frac{1}{2}a$.

Demnach ist in der Parabel die Subnormallinie beständig dem halben Parameter gleich,

gleich, folgends die Normallinie MH $=$ $\sqrt{(yy+\frac{1}{4}aa)}=\sqrt{(ax+\frac{1}{4}aa)}$.

Der 2. Zusatz.

48. Es sey $ax-xx=y^2$

$adx-2xdx=2ydy$

$\frac{1}{2}adx-xdx=ydy$

$PH=ydy:dx=\frac{1}{2}a-x$

Daher ist klar, daß alle Normallinien in dem Circul durch den Mittelpunct gehen, oder, daß alle Radii des Circuls auf der Peripherie perpendicular stehen, und demnach der Tangens des Circuls mit dem Radio einen rechten Winkel machet.

Der 3. Zusatz.

49. Weil $PH=ydy:dx$, und $PM=y$; so ist $HM=\sqrt{(y^2+y^2dy^2:dx^2)}=\sqrt{(y^2dx^2+y^2dy^2:dx^2)}=y\sqrt{(dx^2+dy^2):dx}$.

Die 5. Aufgabe.

50. Die Asymptoten einer Algebraischen Linie zu determiniren.

Auflösung.

1. Wenn die Abscisse AP unendlich groß wird, so ist der Tangens TM die Asymptote, als welche die krumme Linie nicht Tab. IX. Fig. 75.

eher als in einer unendlichen Weite, das ist, niemahls berühren kan (§. 278. *P. I.*). Daher werden die unveränderlichen Grössen in Ansehung der Abscisse x unendlich klein. Wenn ihr demnach in dem Werthe von AT diejenigen Grössen weglasset, die nicht mit x multipliciret sind; so findet ihr die Weite des Punctes C, daraus die Asymptote CD gezogen wird, von dem Scheitelpuncte A.

Z. E. In der Hyperbel ist $AT = ax : (a + 2x)$ und demnach a in Ansehung x unendlich klein, folgends $ax : 2x = \frac{1}{2}a = AC$, wie schon oben (§. 272. 278. *P. I.*) auf andere Art erwiesen worden.

2. Lasset nun ferner auch in der Gleichung für die krumme Linie die unveränderlichen Grössen, die durch keine andere multipliciret sind, weg; so könnet ihr dadurch den Werth von AE finden, und folgends die Asymptote ziehen.

Z. E. In der Hyperbel ist $ay^2 = bx(a + x)$. Da nun a in Ansehung x unendlich klein ist, so habet ihr

$$ay^2 = bx^2$$

folgends $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$$\frac{dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}}{dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}}$$

Nun ist $dx : dy =$ AC.AE (§. 183. *Geom.*)
Das ist $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{1}{2}a$: AE.

Demnach ist $AE = \frac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}aab}$: $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$, wie abermahls oben (§. 272. 278. *P. I.*) schon auf andere Art erwiesen worden.

Anders.

Weil TP : PM = TA : AG; so ist im Asymtotischen Falle, da TP zu CP, TA zu CA und AG zu AE wird, CP : PM = CA : AE. Nun ist $TP = 2x(a+x) : (a+2x)$ und also $CP = 2x^2 : 2x = x$, weil im asymptotischen Falle $a = 0$. Daher ist $x : \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}a$: AE, folgends $AE = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

Zusatz.

51. In unendlichen Hyperbeln ist (§. 41.) überhaupt $AT = nax : (ma + mx + nx)$.
Daher $AC = nax : (mx+nx) = na : (m+n)$.
Und weil ferner (§. 286. *P. I.*),

$$ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$$

so ist $ay^{m+n} = bx^{m+n}$

oder, wenn ihr $m+n=r$ setzet

$$ay^r = bx^r$$

$$y a^{1:r} = x b^{1:r}$$

$$dy a^{1:r} = dx b^{1:r}$$

$$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = AC : AE.$$

$$a^{1:r} : b^{1:r} = na : AE$$

$$\frac{}{r}$$

Derowegen ist $AE = nab^{1:r} : na^{1:r}$

$$= na^{1-1:r}\, b^{1:r} = (n:r)\sqrt[r]{a^{r-1}b}$$

$$\frac{}{r}$$

Die 6. Aufgabe.

52. Den Subtangentem AH in einer Spirallinie zu finden.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 78. Es sey der halbe Diameter des Circuls $AB = a$, die Peripherie $= b$, der Bogen $BD = x$, $AG = y$, und AC dem Radio AD unendlich nahe; so ist $CD = dx$, $EF = dy$. Weil nun EG ein Bogen ist, der mit AG beschrieben worden; so ist

AD

$$AD:AG = CD:EG$$
$$a:y = dx:ydx:a$$

Weil EG mit FA einen rechten Winkel machet (§. 48.) und AH gleichfals auf EA perpendicular aufgerichtet worden; so ist (§. 184. *Geom.*)

$$FE:EG = GA:AH$$
$$dy:\frac{ydx}{a} = y:\frac{y^2dx}{ady}$$

Nun ist für die Archimedische Spirallinie

$$\frac{ax = by}{\text{daher } adx = bdy}$$
$$dx = bdy:a$$

$AH = y^2dx : ady = by^2 : a^2 = axy : a^2 = xy:a.$

Der 1. Zusatz.

53. Also könnet ihr den Subtangentem nicht finden, ihr müsset vorher den Circulbogen x in eine gerade Linie verwandeln können.

Der 2. Zusatz.

54. Für unendliche Spiral-Linien ist

a^m

$$\frac{a^m x^n = b^n y^m}{na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy}$$

$$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$$

$AH = y^2 dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} = ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$

Der 3. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 78.

55. Setzet, daß der Bogen BC sich zu FC verhalten solle wie die Abscisse in einer Algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate. Solchergestalt ist $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, $EF = dy$.

Nun ist

$$AD : AG = CD : EG$$

$$r : r - y = dx : \frac{rdx - ydx}{r}$$

$$FE : EG = GA : AH$$

$$dy : \frac{rdx - ydx}{r} = r - y : \frac{(r-y)^2 dx}{rdy}$$

Wenn ihr nun für dx in dem Werthe von AH seinen Werth aus der Gleichung einer Algebraischen Linie setzet; so habet ihr den Subtangentem AH.

Z. E. In der Parabel ist $ax = y^2$, und also $dx = 2ydy : a$. Derowegen wenn der Bogen BC die Abscisse einer Parabel, FC die Semiordinate und a ihren Parameter vorstellet; so

so ist $AH = 2(r-y)^2 ydy : rady = (2r^2y - 4ry^2 + 2y^3) : ra = (2r^2y - 4arx + 2axy) : ra = \frac{2xy}{r} - 4x + 2ry : a$.

Anmerckung.

56. Ihr könnet BC für die Abscisse und FC für die Semiordinate einer jeden Algebraischen Linie annehmen, und aus der allgemeinen Gleichung für alle krumme Linien einen allgemeinen Werth für AH finden.

Die 7. Aufgabe.

57. Den Subtangentem AT in der Conchoide des Nicomedis zu finden. Tab. IX. Fig. 79.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $Pp = MR = dx$ und $Rm = dy$. Daher ist $PT = ydx : dy$. Es sey ferner $AB = QM = a$, $CM = z$, $BC = b$; so ist $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Damit man den Werth von dx aus der Natur der krummen Linie finden möge; so setzet

$$\frac{a - x = v}{-dx = dv} \qquad \frac{a + b - x = t}{-dx = dt}$$

Ferner (§. 184. *Geom.*).

$$PB : MQ = PC : MC$$

$$v : a = t : z$$

$$at = vz$$

$$adt = zdv + vdz.$$

End=

Endlich (§. 172. *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, das ist

$$z^2 = t^2 + y^2$$

$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$

$$zdz = tdt + ydy$$

Setzet aus den vorhergehenden Gleichungen für *dv* und *dt* ihren Werth in den beyden letzteren; so habet ihr

$$\frac{-adx = -zdx + vdz}{zdx - adx = vdz} \qquad \frac{zdz = -tdx + ydy}{dz = \frac{-tdx + ydy}{z}}$$

$$zdx - adx = dz$$

$$v$$

Daher

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{-tdz + ydy}{z}$$

$$z^2dx - azdx = -vtdx + zydy$$

$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$

$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

Daher ist $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt)$ und die Subnormallinie $ydy : dx = (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$.

Da

Da $v : z - a = z : \frac{(z^2 - az)}{v}$; so ist $(z^2 - az) : v$ die vierte Proportionallinie zu PB, QC und CM. Wenn man nun PC verlängert, bis der verlängerte Theil ihr gleich wird; so hat man die Subnormallinie, und kan demnach die Normallinie und den Tangentem auf eine leichte Weise ziehen.

Die 8. Aufgabe.

58. Den Subtangenten PT in der Cycloide zu finden. Tab. IX. Fig. 80.

Auflösung.

Es sey APB der Circul, der die Cycloidem beschreibet, KP der Tangens des Circuls, qm der anderen Linie QM unendlich nahe, und MR mit dem unendlich kleinen Bogen Pp parallel, den ihr für eine gerade Linie halten könnet. Da nun MS = PO, und der Winkel bey R so groß wie der bey p (§. 97. *Geom.*), folgends, weil bey S und O rechte Winkel sind, RMS = pPO (§. 105. *Geom.*); so ist auch MR = Pp (§. 71. *Geom.*). Es sey AP = x, PM = y, so ist Pp = MR = dx, Rm = dy. Nun ist Rm mit PM parallel, und daher MmR = TMP (§. 97. *Geom.*). Und weil MR mit TP parallel ist, so ist mRM = MPT (§. *cit.*), folgends (§. 183. *Geom.*).

$$mR : MR = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Nun ist in der Cycloide (§. 310. *P. I.*) $y = x$ und daher $dy = dx$, folgends $ydx : dy = y$.

Der 1. Zusatz.

59. Wenn ihr also den Tangentem des Circuls PK (§. 47.) ziehet; so ist es auch leicht den Tangentem der Cycloidis TM zu ziehen.

Der 2. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 80.

60. Lasset AP eine andere algebraische krumme Linie seyn, derer Tangentem ihr ziehen könnet, ihre Bogen aber AP die Abscissen der Transcendentischen Linie AMC; so könnet ihr auf gleiche Weise ihre Tangentes ziehen. Es sey z. E.

$$bx = ay$$

so ist $bdx = ady$

$$dx = ady : b$$
$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

Die 9. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 81.

61. Den Subtangentem TP zu der Logarithmischen Linie zu finden.

Auf-

Auflösung.

Es sey AH die Axe, PM die Ordinate. Setzet $AP = x$, $PM = y$, so ist $Pp = RM = dx$, $mR = dy$, und weil die Aehnlichkeit der Triangel mRM und PMT wie oben (§. 32.), erwiesen werden kan; so ist (§. 184. *Geom.*).

$$mR : RM = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Setzet eine andere Abscisse $= v$, die zugehörige Semiordinate $= z$: so ist der Subtangens $= zdv : dz$. Weil die Abscissen in einer arithmetischen Progreßion fortgehen, so ist $dx = dv$ (§. 69. *Arithm.*). Hingegen weil die Semiordinaten in einer geometrischen fortschreiten (§. 360. *P. I.*).

$$\frac{y : y + dy = z : z + dz}{}$$

Daher $y : dy = z : dz$ (§. 142. *P. I.*).

Nun ist $\frac{dx = dv}{}$

Daher $ydx : dy = zdv : dz$ (§. *cit.*).

Also sind in der Logarithmischen Linie alle Subtangentes einander gleich, oder der Subtangens ist eine unveränderliche Linie.

Von den grösten und kleinesten Applicaten der krummen Linien.

Die 9. Erklärung.

62. Wenn die Semiordinaten bis zu einem gewissen Ziele immer mit den Abscissen wachsen, hernach aber wieder abnehmen, unerachtet diese noch beständig zunehmen; so nennet man die Grösste diejenige, wo das Wachsthum aufhöret. Ingleichen wenn sie bis auf ein gewisses Ziel immer abnehmen, indem die Abscissen zunehmen, und hernach mit diesen fort wachsen, so heisset diejenige die Kleineste, wo die Vergeringerung aufhöret. Die Methode einen Werth der Abscisse in lauter unveränderlichen Grössen zu finden, dem die gröste oder kleineste Applicate oder Semiordinate zukommt, nennet man die Methode von den Grösten und Kleinesten. (Methodum de maximis & minimis).

Anmerckung.

63. Man kan hierdurch auch viel andere Fragen auflösen, da das gröste oder kleineste unter Dingen von einer Art gesuchet wird, wie es die folgenden Exempel zeigen werden.

Die 10. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 82.

64. Die gröste oder kleineste Applicate

cate in einer algebraischen Linie zu determiniren.

Auflösung.

Es ist klar, daß der Tangens in dem Puncte G, wo die gröste oder kleineste Applicate ist, mit der Axe parallel lauft, und daher der Subtangens unendlich groß ist. Wenn nun in allen algebraischen Linien der Subtangens $ydx:dy$ (§. 32.) unendlich groß wird; so ist dy in Ansehung des Zählers ydx unendlich klein, weil er dy unendlichmahl in sich begreiffen muß, und darum $dy=o$ (§. 4.). Suchet derowegen aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie die Differentialgrösse der Applicate und setzet sie $=o$; so könnet ihr aus dieser Gleichung den Werth von x durch gehörige Reduction finden.

In einigen Linien fället der Tangens in die Applicate CG, und alsdenn ist der Subtangens $ydx:dy=o$. Wenn nun dieser Bruch unendlich klein seyn soll, so muß dy unendlich groß seyn in Ansehung des Zählers ydx. Dannenhero wenn $dy=o$ keinen möglichen Werth für die Abscisse zur grösten Applicate giebet; so setzet $dy=\infty$, das ist, einem unendlichen Werthe, und suchet aus dieser Gleichung die Abscisse x. Tab. IX. Fig. 83.

Der 1. Zusatz.

65. Im Circul ist

$$ax - xx = y^2$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$2$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Die Abscisse, welche in dem Circul der grösten Applicate zugehöret, ist dem halben Diameter gleich.

Der 2. Zusatz.

66. Für unendliche Circul ist

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m+1)x^m$$

$$x^{m-1}$$

$$ma = (m+1)x$$

$$ma : (m+1) = x$$

Es sey $m = 3$, so ist es ein Circul von dem dritten Geschlechte und $x = \frac{3}{4}a$.

Der 3. Zusatz.

67. Für unendliche Ellipses ist

(m+

$(m+n)\,ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx.$

$dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx$
$: (m+n)\,ay^{m+n-1} = o$

$nbx^m(a-x)^{n-1} = mbx^{m-1}(a-x)^n$
$x^{m-1}(a-x)^{n-1}$

$nbx = mba - mbx$

$nbx + mbx = mba$

$x = ma : (m+n)$

Es sey $m = 1$, $n = 1$, so ist es eine Ellipsis von dem ersten Geschlechte und $x = \frac{1}{2}a$, wie im Circul. Hingegen sey $m = 2$, $n = 1$, so ist es eine Ellipsis von dem anderen Geschlechte und $x = \frac{2}{3}a$.

Der 4. Zusatz.

68. Es sey $x^3 + y^3 = axy$

so ist $3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$

$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy$

$(3x^2dx - aydx) : (ax - 3y^2) = dy = o$

$3x^2 = ay$

$3x^2 : a = y$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3ax^3 : a = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Der 5. Zusatz.

69. Es sey $y - a = a^{1:3}(a - x)^{2:3}$

$$dy = -2a^{1:3}dx : 3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$-2a^{1:3} = 0$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, wenn ihr $dy = 0$ setzet, so nehmet

$$dy = -2a^{1:3}dx : 3(a-x)^{1:3} = \infty$$

Also ist $3(a-x)^{1:3}$ in Ansehung seines Zählers $2a^{1:3}dx$ unendlich klein. Darum habt ihr

$$3(a-x)^{1:3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x$$

Die 11. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75.

70. Aus dem gegebenen Puncte H in der Axe einer krummen Linie an die Periphe-

ripherie eine gerade Linie LM zu ziehen, welche die kleineste unter allen ist, die sich aus diesem Puncte ziehen lassen.

Auflösung.

Es sey $AP = x$ $PM = y$, $AH = c$, so ist $PH = c - x$, und, weil $PM^2 + PH^2 = MH^2$ (§. 172. *Geom.*); $c^2 - 2cx + xx + yy = MH^2$. Nehmet MH an als die Applicate einer krummen Linie und setzet

$$c^2 - 2cx + xx + yy = z^2$$

so ist $2xdx - 2cdx + 2ydy = 2zdz$

$$(2xdx - 2cdx + 2ydy) : 2z = dz = 0$$

$$xdx - cdx + ydy = 0$$

Wenn ihr nun aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von ydy setzet; so könnet ihr daraus AP determiniren, der die Applicate PM zugehöret, dahin die kürzeste Linie HM gezogen wird.

Der 1. Zusatz.

71. Es sey für eine Parabel

$$ax = yy$$

so ist $adx = 2ydy$

$$\frac{\frac{1}{2}adx = ydy}{xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \frac{1}{2}adx = 0}$$

$$x - c + \frac{1}{2}a = 0$$

$$x = c - \frac{1}{2}a.$$

Der 2. Zusatz.

72. Es sey für eine Ellipsin

$$ay^2 = abx - bx^2$$

so ist $2aydy = abdx - 2bxdx$: $2a$

$$ydy = \frac{1}{2}bdx - bxdx : a$$

$$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \frac{1}{2}bdx - bxdx : a = 0$$

$$x - c + \frac{1}{2}b - bx : a = 0$$

$$ax - ac + \frac{1}{2}ab - bx = 0$$

$$ax - bx = ac - \frac{1}{2}ab$$

$$x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a - b) \quad : \; a - b$$

Der 3. Zusatz.

73. Auf gleiche Weise findet ihr für die Hyperbel, daß $x = (ac + \frac{1}{2}ab) : (a + b)$.

Die

Die 12. Aufgabe.

74. Eine Linie AB dergestalt in D zu schneiden, daß das Product aus dem Quadrate des einen Theiles AD in den anderen DB das gröste sey unter allen, die auf dergleichen Art formiret werden können. Tab. VIII. Fig. 67.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$, so ist $AD^2 . DB = axx - x^3$. Setzet demnach, es sey eine krumme Linie, in welcher

$$axx - x^3 = aay$$

so ist

$$2axdx - 3x^2dx = aady$$

$$(2axdx - 3x^2dx) : aa = dy = o$$

$$2ax = 3x^2$$

$$\frac{2}{3}a = x.$$

Die 13. Aufgabe.

75. Eine Linie AB dergestalt in D zu schneiden, daß das Product aus einer gegebenen Dignität des einen Theiles AD in eine gegebene Dignität des anderen Theiles DB das gröste unter allen sey, die auf dergleichen Art formiret werden. Tab. VIII. Fig. 67.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$; so ist $x^m (a - x)^n$ das gröste von seiner Art. Setzet demnach

x^m

$$x^m(a-x)^n = a^{m+n-1}y$$

so ist $mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx = a^{m+n-1}dy$

$(mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx) : a^{m+n-1} = dy = o$

$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$

$m(a-x)^n = nx(a-x)^{n-1}$

$ma - mx = nx$

$ma : (m+n) = x$

Die 14. Aufgabe.

76. Unter allen Parallelepipedis, die einem gegebenen Würffel gleich sind, und deren eine Seite gegeben wird, dasjenige zu finden, das die geringste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey b die eine Seite, x die andere, der gegebene Würffel $= a^3$, so ist die dritte $= a^3 : bx$.

Folgends die Fläche des Parallelepipedi $2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b$. Setzet demnach es sey in einer krummen Linie.

$$2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b = ay$$

so ist $2bdx - 2a^3dx : x^2 = ady = o$

$2b - 2a^3 : x^2 = o$

$bx^2 = a^3$

$x^2 = a^3 : b$

$x = \sqrt{(a^3 : b)}$

Also sind die drey Seiten b, $\sqrt{(a^3 : b)}$ und $a^3 : b\sqrt{(a^3 : b)} = \sqrt{a^6} : \sqrt{(b^2a^3 : b)} = \sqrt{a^6} : \sqrt{a^3b} = \sqrt{(a^3 : b)}$.

Die 15. Aufgabe.

77. Unter allen Parallelepipedis, die einem gegebenen Würffel gleich sind, dasjenige zu finden, so die kleineste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey der gegebene Würffel $= a^3$, die eine Seite $= x$, so sind die beyden anderen Seiten (§. 76.) $\sqrt{(a^3 : x)}$, und daher ist die Fläche des Parallelepipedi $= 2a^3 : x + 4\sqrt{a^3x}$. Da nun dieses die kleineste von ihrer Art ist, so setzet die Gleichung für eine krumme Linie,

$2a^3 : x + 4\sqrt{a^3x} = ay$

so ist $-2a^3dx : x^2 + 2a^3dx : \sqrt{a^3x} = ady$

$-2a^2dx : x^2 + 2a^2dx : \sqrt{a^3x} = o$

$$\frac{a^2 : \sqrt{a^3x} = a^2 : x^2}{x^2 = \sqrt{a^3x}}$$

$$\frac{x^4 = a^3x}{x^3 = a^3}$$

$$x = a$$

Also hat der Würffel selbst die kleineste Fläche.

Die 16. Aufgabe.

Tab. X. Fig. 84. 78. Unter allen Kegeln, die innerhalb einer Kugel beschrieben werden können, denjenigen zu determiniren, der die gröste Fläche hat.

Auflösung.

Es ist klar, daß, wenn sich ein halber Circul um seinen Diameter AB wendet, derselbe eine Kugel, die Triangel aber ANP, AFE &c. Kegel beschreiben. Die Fläche des Kegels kommt heraus, wenn ihr die Seite des Kegels FA durch die halbe Peripherie, die mit dem Radio FE beschrieben worden, multiplicirt. Weil ihr nun die gröste von ihrer Art suchet, so setzet $AE = x$, $AB = a$, und es ist $FE = \sqrt{(ax - xx)}$ (§. 210. *Geom.*) die halbe Peripherie $m\sqrt{(ax - xx)}$, $AF = \sqrt{ax}$. Derowegen habt ihr die Gleichung für eine krumme Linie.

$$m\sqrt{(ax-xx)}\sqrt{ax}=ay$$

$$m\sqrt{(a^2x^2-ax^3)}=ay$$

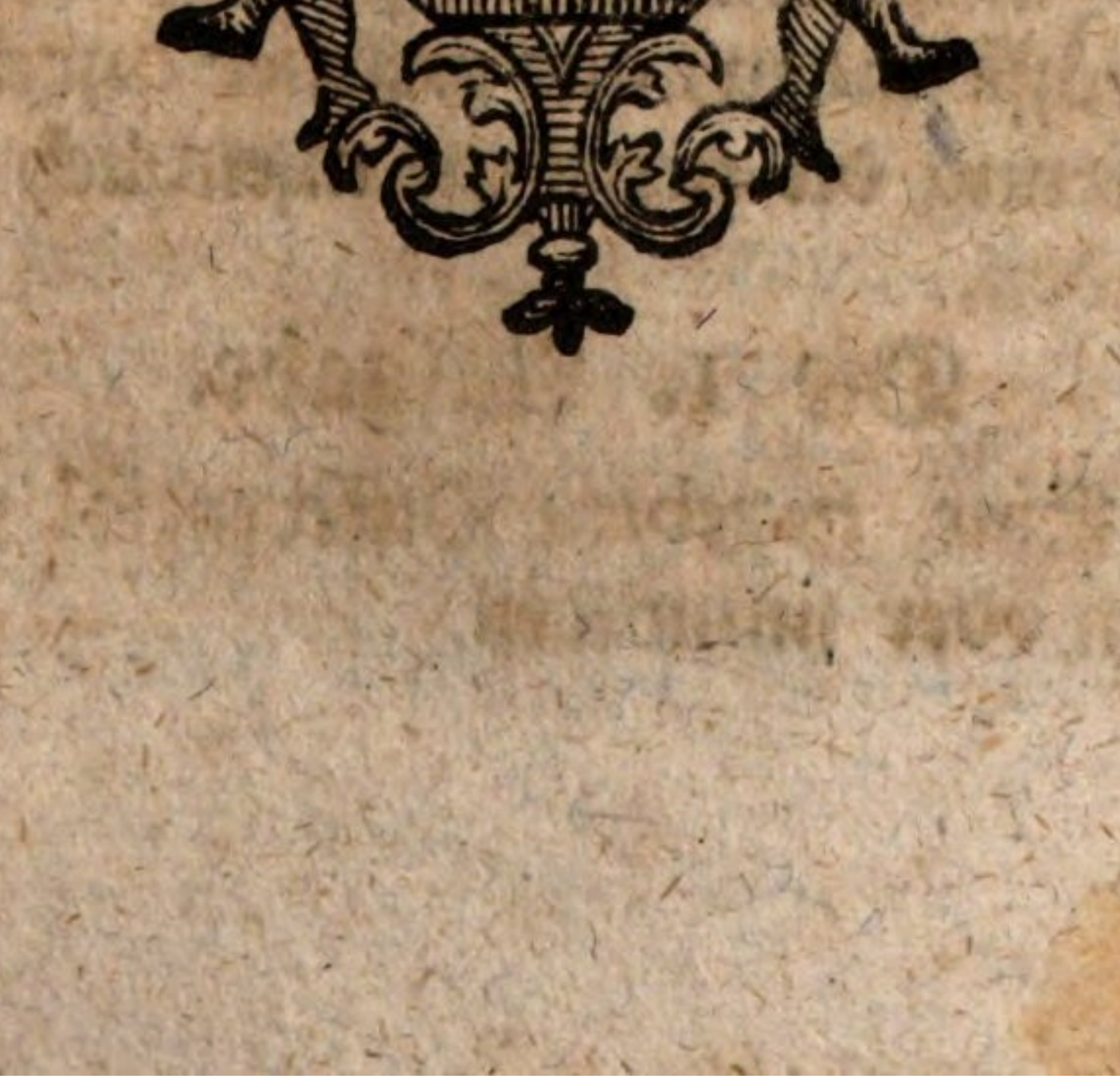
$$2ma^2xdx-3max^2dx:2\sqrt{(a^2x^2-ax^3)}=ady$$

$$2ax-3x^2=0$$

$$2a=3x$$

$$\tfrac{2}{3}a=x$$

Ende des anderen Theiles.



Der

Der dritte Theil
Von den
Anfangs-Gründen
der
Integral-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

79. Die Integral-Rechnung ist eine Wissenschaft aus einer gegebenen unendlich kleinen Grösse diejenige endliche zu finden, durch deren Differentiirung sie entstehet.

Zusatz.

80. Derowegen habt ihr eine gewisse Probe ob ihr die rechte Grösse gefunden, wenn ihr die gefundene Integral nach den oben gegebenen Regeln differentiiret, und die gegebene Differential wieder heraus kommt.

Die 2. Erklärung.

81. Integriren oder summiren heisset die Grösse finden, aus welcher durch Differentiirung die gegebene unendlich kleine entstanden.

Die 1. Aufgabe.

82. Eine gegebene Differential zu integriren oder summiren.

Auf-

Auflösung.

Gleichwie man die Differentiale der veränderlichen Grössen durch d andeutet; so pfleget man die Integrale derselben als die Summe unendlicher unendlich kleiner Grössen durch $\int$ anzudeuten. Daher heisset $\int ydx$ so viel als die Integral von ydx.

Wenn ihr nun die Integral finden wollet, so vergleichet die gegebene Differential mit denen, so ihr oben (§. 13. & seqq.) gefunden: so werdet ihr bald wahrnehmen, wie die Veränderung vorzunehmen sey. Es ist aber

I. $\int dx = x \pm a$

II. $\int (dx \pm dy) = x \pm y \pm a$ oder $x \pm y$

III. $\int (xdy + ydx) = xy$

IV. $\int mx^{m-1}dx = x^m$

V. $\int (n:m)x^{n-m:m}dx = x^{n:m}$

VI. $\int (ydx - xdy):y^2 = x:y$

Von diesen Formuln seyd ihr gewiß, daß sie sich alle integriren lassen, und zwar setzet ihr in dem anderen und ersten Falle nur an statt dx oder dy die veränderliche Grösse x oder y selbst. In dem dritten multipliciret ihr die beyden veränderlichen Grössen x, y durch einander, dadurch ihre Differentiale dy und dx multipliciret sind. In dem vierten und fünften (welcher der gewöhnlichste ist) addiret ihr zu dem Exponenten der Dignität der ver-

änderlichen Grösse 1, und durch den vermehrten und die Differential der veränderlichen Grösse dividiret, ihr die gegebene Differential. Endlich in dem sechsten Falle nehmet ihr die veränderliche Grösse mit dem Zeichen — für den Zähler und die Wurtzel von dem Quadrate des Nenners für den Nenner an.

Die 1. Anmerckung.

83. Es können zwar noch viel andere Fälle vorkommen, die hier nicht berühret werden: allein ihr werdet es besser aus Exempeln, als durch weitläuftige Regeln lernen.

Die 2. Anmerckung.

84. Mercket aber, daß einige Grössen sind, die sich nicht integriren lassen. Denn wie man in der gemeinen Algebra zwar alle Grössen zu einer verlangten Dignität erheben, nicht aber aus jeder Dignität eine verlangte Wurtzel ausziehen kan; eben so kan man in der höheren Analysi zwar eine jede veränderliche Grösse differentiiren, allein nicht eine jede Differential summiren. Gleichwie man aber in der gemeinen Algebra die Wurtzel durch Näherung suchet, eben so pfleget man in der höheren die Integral durch Näherung zu suchen, wo man sie nicht vollkommen haben kan. Allein zur Zeit hat man noch keine Regel, daraus man schliessen könte, ob die Summation statt findet oder nicht, und können wohl einige Differentiale zum Summarien geschickt seyn, die wir zur Zeit noch nicht summiren können.

Von den Quadraturen der krummen Linien.

Die 3. Erklärung.

85. Die Differential oder das Element einer

einer ebenen Fläche, die in eine krumme und zwey gerade Linien eingeschlossen, als AMP, ist das Rectangulum aus der Semiordinate PM in die Differential der Abscisse Pp. Tab. IX. Fig. 75.

Der 1. Zusatz.

86. Derowegen wenn die Semiordinate $PM = y$, $AP = x$, so ist $Pp = dx$ und das Rectangulum $PMRp = ydx$.

Der 2. Zusatz.

87. Weil die Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind, so ist ihre Differentz mR in Ansehung ihrer nichts (§. 4.), und daher das Rectangulum PMRp dem Trapezio PMmp gleich (§. 5.). Da ihr nun die Figuren in unendliche solche Trapezia resolviren könnet; so ist $\int ydx$ der Inhalt der Fläche AMP.

Der 3. Zusatz.

88. Derowegen wenn ihr aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von y setzet, und ihr könnet die Differential der Fläche integriren, so habet ihr die Quadratur der Fläche gefunden.

Die 2. Aufgabe.

89. Den Inhalt eines Triangels zu finden.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 75. Wenn ihr die krumme Linie AM als eine gerade ansehet, so ist AMP ein Triangel, und daher auch sein Element ydx. Setzet nun die Höhe des Triangels, davon x ein Theil ist $= a$, die Grundlinie, welche mit PM oder y parallel ist $= b$; so ist (§. 184. *Geom.*) $a:b = x:y$ folgends

$$ay = bx$$

$$y = bx:a$$

$$ydx = bxdx:a$$

$$\int ydx = bx^2:2a \text{ (§. 82.)}$$

Wenn ihr nun den gantzen Triangel verlanget, so setzet für den Theil der Höhe x, die gantze Höhe a und ihr findet den Inhalt $ba^2:2a = \frac{1}{2}ab$.

Anmerckung.

90. Dieses Exempel habe ich nur zu dem Ende gegeben, damit ihr sehet, daß durch die Integral-Rechnung, deren Gründe den Anfängern zuerst zweifelhaft scheinen, weil man den Triangel MmR für nichts ansiehet, eben das gefunden wird, was in der gemeinen Geometrie aus anderen Gründen erwiesen worden.

Die 3. Aufgabe.

91. Die Parabel zu quadriren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$a^{\frac{1}{2}}$

$$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$\frac{}{} dx$$

$$y dx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\frac{}{}$$

$$\int y dx = \tfrac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} \sqrt{a x^3} = \tfrac{2}{3} \sqrt{x^3 y^2}$$
$$= \tfrac{2}{3} xy.$$

Zusatz.

92. Also verhält sich der Raum in der Parabel AMP zu dem Rectangulo aus der Semiordinate PM in die Abscisse PA, wie $\frac{2}{3} xy$ zu xy, das ist, wie 2 zu 3.

Die 4. Aufgabe.

93. Unendliche Parabeln auf einmahl zu quadriren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln und noch andere Linien ist

$$a^m x^n = y^r$$

$$\frac{}{}$$

$$a^{m:r} x^{n:r} = y$$

$$\frac{}{}$$

$$y dx = a^{m:r} x^{n:r} dx$$

$$\frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{}$$

$$r \qquad\qquad r$$

$$\int y dx = \frac{}{n+r} a^{m:r} x^{n+r:r} = \frac{}{n+r} yx$$

3. E. Es sey eine Parabel von dem an-

deren Geschlechte, so ist $a^2x = y^3$, daher $r = 3$, $n = 1$, folgends $\int y dx = \frac{3}{4} xy$.

Die 5. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75. 94. Das Stücke von der Parabel PMNS zu quadriren.

Auflösung.

Es sey die unveränderliche Linie $AP = b$, $PS = x$, $SN = y$, der Parameter $= a$; so ist $AS = b + x$ und (§. 217. *P. L.*).

$$ab + ax = y^2$$
$$\sqrt{(ab + ax)} = y$$
$$dx\sqrt{(ab + ax)} = ydx$$

Damit man dieses Element integriren kan; so setzet

$$\sqrt{(ab + ax)} = v$$
so ist $ab + ax = v^2$
$$adx = 2vdv$$
$$dx = 2vdv : a$$
$$dx\sqrt{(ab + ax)} = 2v^2dv : a$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}v^3 : a = \tfrac{2}{3}(b + x)\sqrt{(ab + ax)}.$$

Weil

Weil x in $P = o$ wird und auch der Raum PSNM nichts werden muß, wenn $x = o$; hingegen wenn ihr in der gefundenen Summe $x = o$ setzet, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig bleibet; so ist klar, daß ihr von dem gefundenen Werthe $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ noch abziehen müsset, damit ihr den Inhalt von dem Raume $PMNS = \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ bekommt. Nemlich $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$ ist der gantze Paraboliſche Raum ANS, und $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ das Stücke AMP; folgends der Unterſchied PMNS.

Es könte auch AS von beſtändiger Gröſſe angenommen und x von S angerechnet werden. Wenn nun $AS = b$, $SP = x$, ſo iſt $PA = b - x$, folgends (weil $PM = y$)

$$\frac{ab - ax = y^2}{\sqrt{(ab-ax)} = y}$$
$$\frac{}{dx\sqrt{(ab-ax)} = ydx.}$$

Setzet wie vorhin

$$\frac{ab - ax = v^2}{-adx = 2vdv}$$
$$\frac{}{dx = -2vdv : a}$$
$$\frac{}{dx\sqrt{(ab-ax)} = -2v^2dv : a}$$
$$\frac{}{\int ydx = -\frac{2}{3}v^3 : a = -\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}}$$

so iſt

Setzet ferner, wie vorhin, $x = o$; so bleibet $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig, und demnach müsset ihr $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ addiren, damit der Inhalt des Raumes PMNS herauskommt. Nemlich ANS $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ und APM $= \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$; folgends PMNS $= \frac{2}{3}b^3\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

Zusatz.

95. Wenn also die Gleichung für eine krumme Linie gegeben wird, und man nicht weiß, wo x in der Axe seinen Anfang hat: so erhellet aus der Auflösung, daß man nur $x = o$ setzen darf, um zu finden, ob noch etwas zu addiren, oder zu subtrahiren übrig verbleibet.

Die 6. Aufgabe.

96. Eine Linie zu quadriren, in welcher $xy^3 = a^4$.

Auflösung.

Weil $xy^3 = a^4$

so ist $y^3 = a^4 : x = a^4x^{-1}$

$y = a^{4:3}x^{-1:3}$

$ydx = a^{4:3}x^{-1:3}dx$

$\int ydx = \frac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2}$.

Die 7. Aufgabe.

97. Die krumme Linie des *Carteſii*

(Tom.

(Tom. 3. Epist. p. 219.) zu quadriren, in welcher $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Auflösung.

Weil $b^2y = bx^2 - x^3$

so ist $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$

$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$

Die 8. Aufgabe.

98. Die krumme Linie zu quadriren, deren Gleichung ist $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4y$.

Auflösung.

Weil $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$

so ist $ydx = (x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a)$ dx, $\int ydx = x^6 : 6a^4 + x^5 : 5a^3 + x^4 : 4a^2 + x^3 : 3a + ax$.

Die 9. Aufgabe.

99. Eine krumme Linie zu quadriren, in welcher $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^4 + a^2x^2$

so ist $y = \sqrt{(x^4 + a^2x^2)} = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

$ydx = xdx\sqrt{(x^2 + a^2)}$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, setzet

$$x^2 + a^2 = v^2$$

so ist $2xdx = 2vdv$

$$xdx\sqrt{(a^2+x^2)} = v^2dv$$

$\int xdx\sqrt{(x^2+a^2)} = \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$.

Setzet nun $x = 0$, so bleibet $\frac{1}{3}a^3$ übrig. Solchergestalt ist $\int ydx = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)} - \frac{1}{3}a^3$ (§. 94.).

Die 10. Aufgabe.

100. Eine krumme Linie zu quadriren in welcher $y^2 = \frac{1}{4}x^3 + ax^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^3 + axx$

so ist $y = x\sqrt{(x+a)}$

$$ydx = xdx\sqrt{(x+a)}$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, setzet

$$x + a = v^2$$

so ist $x = v^2 - a$

dx

$dx = 2vdv$

$xdx\sqrt{(x+a)} = 2v^4dv - 2av^2dv$

$\int xdx\sqrt{(x+a)} = \frac{2}{5}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = (\frac{2}{5}(xx+2ax+aa) - \frac{2}{3}(ax+aa))\sqrt{(x+a)} = (\frac{6}{15}(xx+2ax+aa) - \frac{10}{15}(ax+aa))\sqrt{(x+a)} = (6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)} : 15 + \frac{4}{15}a^2\sqrt{a}$ (§. 94.).

Die II. Aufgabe.

101. **Eine krumme Linie zu quadriren, in welcher** $y^2 = x^3 : (x+a)$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^2 : (x+a)$

so ist $y = x : \sqrt{(x+a)}$

$ydx = xdx : \sqrt{(x+a)}$

Setzet $\sqrt{(x+a)} = v$

so ist $x+a = v^2$

$x = v^2 - a$

$dx = 2vdv$

$xdx : \sqrt{(x+a)} = (2v^3dv - 2avdv) : v$

$= 2v^2dv - 2adv$

$\int xdx : \sqrt{(x+a)} = \frac{2}{3}v^3 - 2av = (\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}a - 2a)\sqrt{(x+a)} = (\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}a)\sqrt{(x+a)} = \sqrt{(4x^3 - 12ax^2}$

+

$+ 16a^3 : 9) = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 3axx + 4a^2 - \frac{4}{3}a\sqrt{a}}$ (§. 94.).

Die 12. Aufgabe.

102. **Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu quadriren.**

Auflösung.

Für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist

$$a^2 = by + xy \quad (\S. 287.\ P.\ I.)$$

daher $a^2 : (b + x) = y$

$$ydx = a^2 dx : (b + x)$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, so dividiret in der That

$$b + x) \; a^2 \Big\{ \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} \text{ &c.}$$

$$a^2 + a^2 x : b$$

$$- a^2 x : b$$

$$b + x) \; - a^2 x : b - a^2 x^2 : b^2$$

$$+ a^2 x^2 : b^2$$

$$b + x) \; + a^2 x^2 : b^2 + a^2 x^3 : b^3$$

$$- a^2 x^3 : b^3 +$$

$$b + x)$$

Denn ist $a^2 dx : (b + x) = \frac{a^2 dx}{b} - \frac{a^2 x dx}{b^2} +$

a^2

$\frac{a^2x^2dx}{b^3} - \frac{a^2x^3dx}{b^4}$ u. s. w. unendlich fort.

Folgends habet ihr $\int ydx = \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} +$

$\frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ u. s. w. unendlich fort, das ist,

wenn ihr $a = b = 1$ setzet, $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ &c.

Anmerckung.

103. Diese Quadratur der Hyperbel hat zuerst *Nic. Mercator* in seiner Logarithmotechnia gegeben, welcher die unendlichen Reihen zu Quadrirung der Figuren zuerst gebrauchet, die man nicht genau quadriren kan.

Die 13. Aufgabe.

104. Den Circul zu quadriren.

Auflösung.

Die Gleichung für den Circul ist

$y^2 = a^2 - x^2$ (§. 198. *P. I.*)

$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$

$ydx = dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$

Ziehet aus $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ die Wurtzel, so findet ihr (§. 97. *P. I.*) $ydx = adx - \frac{x^2dx}{2a} -$

$\frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5} - \frac{5x^8dx}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort,

dessen

dessen Integrale $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ u. s. w. unendlich fort den Theil des

Tab. X. Fig. 84.

Circuls BNP ausdrucket.

Wenn ihr für x den halben Diameter a setzet, so kommt der Werth des Quadrantens $a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112} - \frac{5a^2}{1152}$ u. s. w. Setzet $a = \frac{1}{2}$, so ist $a^2 = \frac{1}{4}$, und demnach der gantze Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. unendlich fort.

Anders.

Tab. II. Fig. 15.

Es sey CB der Tangens des halben Bogens $GB = x$, der halbe Diameter $BA = a$. so ist BD der Tangens des gantzen Bogens $BG = 2aax : (aa - xx)$ (§. 190. *P. I.*), folgends $DA = (a^3 + ax^2) : (aa - xx)$ (§. *cit.*). Nun ist (§. 184. *Geom.*) $DA : DB = GA : GH$ und $AD : AB = AG : AH$: darum findet ihr $GH = 2a^2x : (a^2 + x^2)$ und $AH = (a^3 - ax^2) : (aa + xx)$ endlich $BH = AB - AH = 2ax^2 : (aa + xx)$. Wenn ihr der beyden Differential-Grössen von GH und BH, nemlich $(2a^4dx - 2a^2x^2dx) : (a^2 + x^2)^2$ und $4a^3xdx : (a^2 + x^2)^2$, Quadrate $(4a^8dx^2 -$

$8a^6$

$8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ und $16a^6x^2dx^2 : (a^2 + x^2)^4$ zusammen setzet, und aus der Summe $(4a^8dx^2 + 8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ die Quadratwurtzel $(2a^4dx + 2a^2x^2dx) : (a^2 + x^2)^2 = 2a^2dx : (a^2 + x^2)$ ausziehet; so habet ihr die Differential des Bogens GB. Multipliciret diese in den halben Radium oder $\frac{1}{2}a$; so kommt das Element des Sectoris BGA (§. 171. *Geom.*) heraus $a^3dx : (a^2 + x^2)$. Setzet $a = 1$; so ist das Element $dx : (1 + x^2)$. Nun findet ihr durch die gemeine Division wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 102.) $1 : (1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ u. s. w. unendlich fort, und folgends

$$\int dx : (1 + x^2) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}$$

u. s. w. unendlich fort. Diese unendliche Reihe ist für den Ausschnitt BAG, dessen halben Bogens Tangens $BC = x$ ist. Nun ist der Tangens des halben Quadrantens dem Radio gleich. Derowegen wenn ihr $x = 1$ setzet, so ist $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. unendlich fort der Inhalt des Quadrantens. Nehmet ihr endlich den Diameter des Circuls 1 an; so ist eben selbige unendliche Reihe der Inhalt des gantzen Circuls.

Anmerckung.

105. Die erste Reihe für den Circul hat der Herr *Newton*; die andere der Herr von Leibnitz gefunden, und ist auch schon vorher *Iacob Gregorius* darauf kommen, ob er sie gleich nicht in Schriften publiciret.

Die

Die 14. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 27.

106. Die Ellipsin zu quadriren.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $DC = b$, $PC = x$, $PM = y$ so ist $AP = a - x$, $PB = a + x$, und aus der Natur der Ellipsis

$$AP.\ PB : AC^2 = PM^2 : CD^2 \quad (\S.\ 251.\ P.\ I.)$$

$$aa - xx : aa = yy : bb$$

$$aayy = bb(aa - xx)$$

$$y = b\sqrt{(aa - xx) : a}$$

$$ydx = bdx\sqrt{(aa - xx) : a}$$

Nun ist $\sqrt{(aa - xx)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort (§. 97. *P. I.*).

Derowegen ist $bdx\sqrt{(aa - xx) : a} = bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{128a^8}$ u. s. w. unendlich fort. Folgends ist $\int ydx = bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr für x die halbe Axe a setzet, so bekommt ihr für den Quadranten der El-

Ellipsis $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{5}{1152}ab$ u. s. w. unendlich fort, und also für die ganze Ellipsin eben dieselbe Reihe, wenn ihr a für die gantze grosse und b für die gantze Kleine Axe annehmet.

Der 1. Zusatz.

107. Wenn ihr $\sqrt{ab} = 1$ setzet, so kommet die Reihe für den Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. heraus (§. 104.). Derowegen ist die Ellipsis einem Circul gleich, dessen Diameter die mittlere Proportionallinie ist zwischen seiner kleinen und grossen Axe, und also verhält sich die Ellipsis zu dem Circul, der mit der grossen Axe beschrieben wird, wie die kleine Axe zu der grossen.

Der 2. Zusatz.

108. Daher dependiret die Quadratur der Ellipsis von der Quadratur des Circuls.

Die 1. Anmerckung.

109. Die Quadratur des Circuls, der Ellipsis und Hyperbel hat noch niemand durch einen endlichen Werth gegeben.

Die 2. Anmerckung.

110. Aus der gefundenen Quadratur der Ellipsis lässet sich nun ferner der Lehrsatz erweisen, den wir in der Astronomie (§. 419.) angenommen, daß nemlich der Sector des Circuls KAP sich zu dem Sectore CAP verhalte wie der Circul zu der Ellipsi. Denn es ist klar, daß CLP sich zu KLP verhalte, wie $bs dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ zu $s dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 104. Tab. X. Fig. 85.

a

106.), folgends wie *b* zu *a* (§. 144. *P. I.*) oder RE zu DR. Die Triangel aber CAL und KAL verhalten sich wie CL zu KL (§ 176. *Geom.*) oder wie RE zu DR, folgends so wohl sie als die Abschnitte PLC und PLK wie die Ellipsis zu dem Circul (§. 107.). Folgends ist KAL + KLP zu CAL + CLP wie der Circul zu der Ellipsi (§. 144. P. I.)

Die 3. Anmerckung.

111. Daß aber LC : LK = RE : DR lässet sich leicht erweisen. Denn vermöge der gegenwärtigen Aufgabe ist LC = $b\sqrt{(aa-xx)} : a$ und LK = $\sqrt{(aa-xx)}$. Daher LC : LK = $b\sqrt{(aa-xx)} : a\sqrt{(aa-xx)}$ = $b : a$ = RE : DR.

Die 15. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 81.

112. Den Raum HPMI zwischen der logarithmischen Linie MI und ihrer Axe PH zu finden.

Auflösung.

Es sey PM = y, Pp = x, der Subtangens = a (§. 61.), so ist

$$\frac{ydx : dy = a}{ydx = ady}$$

$$\frac{}{\int ydx = ay}$$

Der 1. Zusatz.

113. Setzet QS = z, so ist HQSI = az, folgends PQSM = $ay - az = a(y-z)$ das ist, dem Rectangulo aus dem Subtangente in die Differentz der Semiordinaten PM und QS.

De

Der 2. Zusatz.

114. Derowegen verhalten sich die Räume zwischen zweyen Semiordinaten wie ihre Differentzen.

Die 16. Aufgabe.

115. Die Spirallinie zu quadriren.

Auflösung.

Es sey alles, wie in der 6. Aufgabe (§. 52.), so ist $EG = ydx : a$, folgends der kleine Sector EAG oder das Element der Fläche $y^2dx : 2a$. Nun ist für die Spirallinie (§. 312. *P. I.*). Tab. IX. Fig. 78.

$$ax = by$$

$$a^2x^2 : b^2 = y^2$$

$$y^2dx : 2a = ax^2dx : 2bb$$

$$\int y^2dx : 2a = ax^3 : 6bb.$$

Wenn ihr für x die gantze Peripherie b setzet, so kommt für den Raum, den die gantze Spirallinie einschliesset, $\frac{1}{6}ab$.

Der 1. Zusatz.

116. Da nun der umschriebene Circul $\frac{1}{2}ab$ ist, so verhält sich die Spiralfläche zu ihm wie $\frac{1}{6}ab$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie 1 zu 3 (§. 144. *P. I.*)

Der 2. Zusatz.

117. Für unendliche Spirallinien ist

$$a^m x^n = b^n y^m \text{ (§. 312. P. I.)}$$

$$a x^{n:m} : b^{n:m} = y$$

$$a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m} = y^2$$

$$\int y^2 dx : 2a = max^{(2n+m):m} : (4n+2m)\, b^{2n:m}$$

Wenn ihr nun für x die ganze Peripherie b setzet, so bekommt ihr $mab^{(2n+m):m} : (4n+2m)$ $b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$.

Der 3. Zusatz.

118. Dannenhero verhält sich überhaupt die Spiralfläche zu dem umschriebenen Circul wie $mab : (4n+2m)$ zu $\frac{1}{2} ab$, das ist wie $2m$ zu $4n+2m$, oder wie m zu $2n+m$.

Der 4. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 78.

119. Setzet, daß der Bogen BC sich zu EC verhalten solle, wie die Abscisse in einer algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate.

Und es sey der Bogen $BC = x$, $AE = y$, $AC = r$; so ist $EC = r - y$, $CD = dx$ und

$$AC : CD = AE : EG$$
$$r : dx = y : ydx : r$$

folgends das Element oder der Sector AEG $\frac{1}{2} y^2$

$\frac{1}{2}y^2dx:r$. Setzet nun es sey BC die Abscisse, EC die Semiordinate einer Parabel, so ist

$$ax = r^2 - 2ry + yy$$
$$dx = (2ydy - 2rdy):a$$
$$\tfrac{1}{2}y^2dx:r = (y^3dy - ry^2dy):ar$$
$$\int \tfrac{1}{2}y^2dx:r = y^4:4ar - y^3:3a$$

Der 5. Zusatz.

120. Ihr könnet auch den Raum BFC finden, wenn ihr das Element GDCE suchet, welches ihr findet, wenn ihr CD + EG mit $\frac{1}{2}$EC multipliciret (§. 157. *Geom.*), weil ihr es als ein Trapezium ansehen könnt, dessen baſes CD und EG parallel sind. Nun ist CD + EG $= dx + ydx:r$ und $\frac{1}{2}$EC $= \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}y$. Derowegen das verlangte Element $(r^2dx - y^2dx):2r$. Nehmet nun wie in dem vorigen Exempel (§. 119.) $dx = (2ydy - 2rdy):a$, so ist das besondere Element $(ry^2dy + r^2ydy - y^3dy - r^3dy):ar$, dessen Integrale $y^3:3a + ry^2:2a - y^4:4ar - r^2y:a$ den verlangten Raum giebet. Tab. IX. Fig. 78.

Die 17. Aufgabe.

121. Die Fläche eines jeden Cörpers zu finden, der erzeuget wird, indem eine krumme Linie sich um ihre Axe beweget. Tab. IX. Fig. 75.

Auflösung.

Setzet die Verhältniß des halben Diameters zu der Peripherie $= r:c$, die Abscisse $AP = x$, die Semiordinate $PM = y$, so ist $Pp = dx$, $mR = dy$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 172. *Geom.*) und die Peripherie, welche mit PM beschrieben wird, $= cy:r$. Daher das Element der Fläche $cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}:r$. Wenn ihr nun für dx^2 oder dy^2 seinen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie setzet, und das Element hernach integriret; so kommet der Inhalt eines Stückes von der verlangten Fläche heraus.

Der 1. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 75.

122. Es sey AMP ein Triangel, dessen Höhe $= a$, die Grundlinie $= r$, so ist $ay = rx$ (§. 184. *Geom.* & §. 137. *P. I. Algebr.*) und dannenhero

$$ady:r = dx$$

$$a^2dy^2:r^2 = dx^2$$

$$cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}:r = cy\sqrt{(a^2dy^2 + r^2dy^2)}:r^2$$

$$cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}:r = cydy\sqrt{(a^2 + r^2)}:r^2$$

$$\int cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}:r = cy^2\sqrt{(a^2 + r^2)}:2r^2$$

Setzet für y die Grundlinie r: so kommt die Fläche des Coni heraus $\frac{1}{2}c\sqrt{(r^2 + a^2)}$. Da nun

nun $\sqrt{(r^2+a^2)}$ seine Seite ist: so sehet ihr, daß die Kegelfläche einem Triangel gleich sey, dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche des Kegels und die Höhe seiner Seite gleich ist.

Der 2. Zusatz.

123. Wenn ihr für die beschreibende Linie einen halben Circul annehmet, so findet ihr die Kugelfläche. Da nun im Circul

$$2rx - xx = y^2$$

so ist $2rdx - 2xdx = 2ydy$

$$(rdx - xdx) : y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : y^2 = dy^2$$

$$cy\sqrt{(dx^2+dy^2)} : r = cy\sqrt{(dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx)) : r = cy\sqrt{((2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} : r = cy\sqrt{(r^2dx^2 : y^2)} : r = cyrdx : ry = cdx.}$$

$$\int cdx = cx$$

Setzet für x, den Diameter $2r$, so ist die ganze Kugelfläche $2cr$.

Der 3. Zusatz.

124. Da nun die Fläche des grösten Circuls $\frac{1}{2}cr$; so ist die Fläche der Kugel vier-

mahl so groß als ihr gröster Circul. Hingegen jedes Stück der Kugelfläche verhält sich zu der gantzen wie cx zu $2cr$, das ist, wie x zu $2r$, oder die Höhe des Stückes der Kugel zu dem gantzen Diameter.

Der 4. Zusatz.

125. Es sey die beschreibende Linie eine Parabel, so findet ihr die Fläche eines Paraboli schen Afterkegels. Da nun in der Parabel

$$adx = 2ydy$$

so ist $dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$

$$cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy\sqrt{(4y^2dy^2 + a^2dy^2, : a^2)}:$$
$$r = cydy\sqrt{(4yy + aa)} : ar$$

Setzet $\sqrt{(4yy + aa)} = v$

so ist $4yy + aa = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$

$$cydy\sqrt{(4yy + aa)} : ar = cv^2dv : 4ar$$

$$\int cv^2dv : 4ar = cv^3 : 12ar = (4cyy + caa)\sqrt{}$$
$$(4yy + aa) : 12ar - ca^2 : 12r \text{ (§. 93.).}$$

Setzet r für y, so habet ihr die Fläche des gantzen Afterkegels $(4crr + caa)\sqrt{(4rr + aa)} : 12ar - ca^2 : 12r$.

Von

Von der Rectification der krummen Linien.

Die 4. Erklärung.

126. Eine krumme Linie rectificiren heisset so viel als die Länge derselben finden.

Der 1. Zusatz.

127. Wenn die beyden Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind, so ist der Bogen Mm das Element des Bogens Am, das ist, $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Tab. IX. Fig 75.

Der 2. Zusatz.

128. Derowegen wenn ihr vor dx^2 oder dy^2 den Werth aus der Natur der krummen Linie setzet, und das besondere Element integriret; so habet ihr die krumme Linie oder ihren Bogen AM rectificiret.

Der 3. Zusatz.

129. Ihr könnet auch das Element Mm finden, wenn ihr setzet $PM:TM=dy:Mm$.

Die 18. Aufgabe.

130. Die Parabel zu rectificiren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax=y^2$

$$adx = 2ydy$$

$$a^2dx^2 = 4y^2dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2)}$$

$$\text{das ist} = dy\sqrt{(aa + 4y^2)} : a$$

Damit ihr nun dieses Element integriren könnet, so ziehet (§. 95. *P. I.*) die Wurtzel aus $\sqrt{(aa + 4y^2)}$. Es ist nemlich

$$n = 2,\ m = 1,\ P = a^2,\ Q = 4y^2 : a^2$$

$$P^{m:n} = +a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}a.4y^2 : a^2 = +2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{2}y^2 : a.4y^2 : a^2 = -2y^4 : a^3 = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6}.-2y^4 : a^3.4y^2 : a^2 = +4y^6 : a^5 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8}.4y^6 : a^5.4y^2 : a^2 = -10y^8 : a^7$$

u. s. w. unendlich fort.

Demnach ist $\sqrt{(aa + 4y^2)} = a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y^8}{a^7}$ &c. und daher $dy\sqrt{(aa$

+4

$+4y^2) : a = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6}$

$- \frac{10y^8dy}{a^8}$ &c. Deren Integral $y + \frac{2y^3}{3a^2} -$

$2y^5 + 4y^7 - 10y^9$ &c. Die Länge des Bo-

$\frac{}{5a^4} \quad \frac{}{7a^6} \quad \frac{}{9a^8}$

gens exprimiret.

Die 79. Aufgabe.

131. Die Parabel zu rectificiren, in welcher $ax^2 = y^3$.

Auflösung.

Weil $ax^2 = y^3$

so ist $2axdx = 3y^2dy$

$4a^2x^2dx^4 = 9y^4dy^2$

$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4a^2x^2 = 9ydy^2 : 4a$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{((9ydy^2 + 4ady^2) : 4a)} =$

$dy\sqrt{((9y + 4a) : 4a)}$

Setzet $\sqrt{((9y + 4a) : 4a)} = v$

so ist $9y + 4a = 4av^2$

$9dy = 8avdv$

$dy\sqrt{(9y+4a,:4a)}=\frac{8}{9}av^2dv$

$\int dy\sqrt{(9y+4a,:4a)}=\frac{8}{27}av^3=$

$\frac{2}{27}(9y+4,:4)\sqrt{(9y+4,:4)}=\frac{2}{27}(9y+4)\frac{1}{2}\sqrt{(9y+4)}=\frac{1}{27}(9y+4)\sqrt{(9y+4)}-\frac{8}{27}$ (§. 39.), wenn $y=0$.

Die 20. Aufgabe.

132. Unendliche Parabeln zu rectificiren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln ist

$y^n=a^{n-1}x=x$, wenn $a=1$.

$ny^{n-1}dy=dx$

$n^2y^{2n-2}dy^2=dx^2$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(n^2y^{2n-2}dy^2+dy^2)}=dy\sqrt{(n^2y^{2n-2}+1)}$.

Ziehet nun aus $\sqrt{(1+n^2y^{2n-2})}$ die Wurzel (§. 95. *P. I.*), und setzet der Kürtze halber $2n-2=r$, so ist in dem Newtonischen Lehrsatze $m=1$, $n=2$, $P=1$, $Q=n^2y^r$

$P^{m:n}=1=A$

$mAQ=\frac{1}{2}n^2y^r=B$

$\frac{}{n}$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}n^2y^r \cdot n^2y^r = -\frac{1}{8}n^4y^{2r} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}\cdot-\frac{1}{8}n^4y^{2r} \cdot n^2y^r = \frac{1}{16}n^6y^{3r} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{16}n^6y^{3r} \cdot n^2y^r = -\frac{5}{128}n^8y^{4r} =$ E &c.

Demnach ist $dy\sqrt{(1+n^2y^{2n-2})} = dy + \frac{1}{2}n^2y^r dy - \frac{1}{8}n^4y^{2r}dy + \frac{1}{16}n^6y^{3r}dy - \frac{5}{128}n^8y^{4r}dy$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $y + \frac{n^2y^{r+1}}{2(r+1)} - \frac{n^4y^{2r+1}}{8(2r+1)} + \frac{n^6y^{3r+1}}{16(3r+1)} - \frac{5n^8y^{4r+1}}{128(4r+1)}$ u. s. w. unendlich fort, die Länge unendlicher Parabeln ausdrucket. Wollet ihr für r seinen Werth $2n-2$ in die Stelle setzen, so bekommt ihr $y + \frac{n^2y^{2n-1}}{2(2n-1)} - \frac{n^4y^{4n-3}}{8(4n-3)} + \frac{n^6y^{6n-5}}{16(6n-5)} - \frac{5n^8y^{8n-7}}{128(8n-7)}$ &c.

Es sey z. E. $n=2$, so bekommt ihr $y + \frac{4y^3}{3.2} - \frac{16y^5}{8.5} + \frac{4.16y^7}{16.7.3}$ &c. das ist, $y + \frac{2y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{4y^7}{7}$ &c. für die Apollonische Parabel,

welche

welche Reihe mit der oben gefundenen übereinkommt, wenn ihr $a = 1$ setzet.

Die 21. Aufgabe.

133. Aus dem gegebenen Tangente eines Circulbogens den Bogen zu finden.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 76. Es sey der Tangens $KB = x$, $BC = 1$, so ist $SK = dx$, $KC = \sqrt{(1+xx)}$, $SL = xdx : \sqrt{(1+xx)}$, wenn nemlich KC und SC einander unendlich nahe sind. Da nun bey L und B rechte Winkel sind (§. 48.) und $BKC = KSL$, weil KCL unendlich klein ist (§. 101. *Geom.*); so ist $KC : BC = SK : KL$ (§. 163. *Geom.*) das ist:

$$\sqrt{(1+x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Ferner $KC : KL = NC : Nn$ (§. 163. *Geom.*)

$$\sqrt{(1+x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 : \frac{dx}{1+x^2}$$

Wenn ihr nun dx durch $1+x^2$ würcklich dividiret, so bekommt ihr für das Element Nn des Bogens Bn $dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ u. s. w. unendlich fort,

den

den Bogen BN exprimiret, dessen Tangens $BK = x$.

Der 1. Zusatz.

134. Der Tangens des Bogens von 45° ist dem Radio BC gleich, und also wird $x = 1$, folgends der Bogen von 45° oder der halbe Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. Setzet ihr aber den gantzen Diameter eins, so ist der Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c.

Der 2. Zusatz.

135. Derowegen verhält sich das Quadrat des Diameters zu der Circulfläche wie der Diameter zu dem Quadranten von der Peripherie (§. 104.)

Anmerckung.

136. Ihr hättet auf eben diese Art den Circul quadriren können (§. 104.).

Die 22. Aufgabe.

137. Aus dem gegebenen Bogen eines Circuls, der kleiner ist als ein Quadrant, den Tangentem zu finden.

Auflösung.

Wenn der Tangens x ist, so ist der Bogen $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. (§. 133.).

Setzet $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. weil nun

$-v + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. $= o$ und

x^3

$$\left.\begin{array}{rl} x^3 = & a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \text{ &c.} \\ & + 3a^2cv^7 \text{ &c.} \\ x^5 = & + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \text{ &c.} \\ x^7 = & + a^7v^7 \text{ &c.} \end{array}\right\} \text{(§. 91. P. I.)}$$

so ist

$$\begin{array}{l} -v = -v \\ x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ &c.} \\ -\frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab\,v^7 \text{ &c.} \\ \qquad\qquad - a\,cv^7 \text{ &c.} \\ +\frac{1}{5}x^5 = \qquad +\frac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{ &c.} \\ -\frac{1}{7}x^7 = \qquad\qquad -\frac{1}{7}a^7v^7 \text{ &c.} \end{array}$$

demnach

$$a - 1 = 0 \qquad b - \tfrac{1}{3} = 0 \qquad c - a^2b + \tfrac{1}{5}a^5 = 0$$

$$a = 1 \qquad b = \tfrac{1}{3} \qquad c = b - \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}$$

$$= \tfrac{5-3}{15} = \tfrac{2}{15}$$

$$d - ab^2 - a^2c + a^4b - \tfrac{1}{7}a^7 = 0$$

$$d = b^2 + c + \tfrac{1}{7} - b = \tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{3}$$

$$= \tfrac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{9} = \tfrac{126 + 135 - 210}{945} = \tfrac{51}{945}$$

$$= \tfrac{17}{315}$$

Setzet nun diese gefundene Werthe für a, b, c, d &c. in die angenommene Reihe für den

den Tangentem; so bekommet ihr $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2v^5}{15} + \frac{17v^7}{315}$ &c.

Die 23. Aufgabe.

138. Aus dem gegebenen Sinu eines Bogens den Bogen, der kleiner als ein Quadrant ist, zu finden.

Auflösung.

Wenn der halbe Diameter des Circuls r, der Sinus des Bogens, oder die Semiordinate y, der Sinus versus oder die Abscisse x ist; so ist die Æquation des Circuls

$$2rx - xx = yy$$

daher $2rdx - 2xdx = 2ydy$

$$dx = ydy : (r - x)$$

$$dx^2 = y^2dy^2 : (r^2 - 2rx + xx)$$

das ist $= y^2dy^2 : (r^2 - y^2)$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(y^2dy^2 + r^2dy^2 - y^2dy^2)} : \sqrt{(r^2 - y^2)} = rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}.$$

Damit dieses Element des Bogens zum integriren geschickt werde, so ziehet aus $1 : (r^2 - y^2)$ die Wurtzel in der That (§. 95. *P. I.*). Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = r^2$, $Q = -y^2 : r^2$

$p^{m:n} = r^{-1} = 1 : r = A$

$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{y^2}{2r^3} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{2r^3} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{3y^4}{8r^5} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{3y^4}{8r^5} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{5y^6}{16r^7} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{5y^6}{16r^7} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{35y^8}{128r^9} = E$

u. s. w. unendlich fort.

Also ist $rdy(r^2-y^2)^{-1:2} = dy + \frac{y^2dy}{2r^2} + \frac{3y^4dy}{8r^4}$

$+\frac{5y^6dy}{16r^6} + \frac{35y^8dy}{128r^8}$ &c. dessen Integral $y +$

$\frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. den verlangten Bogen durch seinen Sinum ausdrucket. Wenn ihr besser sehen wollet, wie die Reihe unendlich fortgehet, so nennet das erste Glied A, das andere B, das dritte C u. s. w. so findet ihr $y + \frac{1.1y^2A}{2.3r^2} + \frac{3.3y^2B}{4.5r^2} +$

$\frac{5.5y^2C}{6.7r^2} + \frac{7.7y^2D}{8.9r^2} + \frac{9.9y^2E}{10.11r^2}$ &c.

Zusatz.

139. Weil der Bogen $v = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. so findet ihr, wie in der 22. Aufgabe (§. 137.) $y = v - \frac{v^3}{6r^2} + \frac{v^5}{120r^4} - \frac{v^7}{5040r^6} + \frac{v^9}{362880r^8}$ &c. $= v - \frac{v^3}{1.2.3r^2} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5r^4} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7r^8} + \frac{v^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9r^8}$

das ist, wenn ihr das erste Glied A, das andere B, das dritte C &c. setzet, $y = v - \frac{v^3 A}{2.3r^2}$.

$+ v^2B - v^2C + v^2D$ &c.
$\overline{4.5r^2} \quad \overline{6.7r^2} \quad \overline{8.9r^2}$

Die 24. Aufgabe.

140. Aus dem gegebenen Sinu verso den Bogen des Circuls zu finden.

Auflösung.

Wenn der Diameter des Circuls $2r$, die Abscisse oder der Sinus versus $= x$ ist, so ist für den Circul

$$2rx - xx = yy$$

$$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$(rdx - xdx) : y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : y^2 = dy^2$$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} = \sqrt{((2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} = rdx : \sqrt{(2rx - xx)} = rdx(2rx - x^2)^{-1:2}$, oder wenn ihr $2r = 1$ setzet, $\frac{1}{2}dx(x - x^2)^{-1:2}$. Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, so ziehet aus $(x - x^2)^{-1}$ die Wurtzel in der That, (§. 95. *P. I.*).

Es ist aber $m = -1, n = 2, P = x, Q = -x$, und demnach

$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$

$mAQ = -\frac{1}{2}, x^{-1:2}, -x = \frac{1}{2}x^{1:2} = B$

$\frac{m}{n}$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}x^{3:2}, -x = \frac{1.3}{2.4}x^{3:2} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{6}, \frac{1.3}{2.4}x^{3:2} - x = \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8}, \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2}, -x = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{7:2}$

&c.

Daher

Daher ist $\frac{1}{2}dx : \sqrt{(x - xx)} = \frac{1}{2}x^{-1:2}dx + \frac{1}{4}x^{1:2}dx + \frac{1.3}{4.4}x^{3:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^{5:2}dx + \frac{1.3}{4.4}\frac{5.7}{6.8}x^{7:2}dx$ &c. und folgends der Bogen

$$AP = x^{1:2} + \frac{1}{2.3}x^{3:2} + \frac{1.3}{2.4.5}x^{5:2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^{7:2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^{9:2}$$ &c. oder

$$\sqrt{x}\left(1 + \frac{1x}{2.3} + \frac{1.3x^2}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^3}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7.x^4}{2.4.6.8.9.}\right.$$ &c.)

Zusatz.

141. Wollet ihr den Sinum versum durch den Bogen ausdrucken, so werdet ihr auf die Art, wie oben (§. 137.) finden $x = \frac{v^2}{1.2} - \frac{v^4}{1.2.3.4.} + \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6.}$ &c. = (wenn ihr das erste Glied A, das andere B u. s. w. setzet

$$\frac{v^2}{1.2} - \frac{v^2 A}{3.4} + \frac{v^2 B}{5.6} - \frac{v^2 C}{7.8}$$ &c.

Von der Cubatur der Cörper.

Die 5. Erklärung.

142. Cubiren heisset den Inhalt eines Cörpers finden.

Der 1. Zusatz.

143. Wenn ein Cörper erzeuget wird, indem eine Figur sich um ihre Axe herum beweget, so beschreibet jede Semiordinate einen Circul, und dannenhero ist das Element desselben das Product aus einem Circul, der mit der Semiordinate beschrieben wird, in die Differential der Abscisse. Wenn ihr demnach die Verhältniß des Radii zu der Peripherie setzet $r:p$, so ist die Peripherie des gedachten Circuls $py:r$ und der Inhalt $py^2:2r$ (§. 162. *Geom.*), folgends das Element $py^2dx:2r$.

Der 2. Zusatz.

144. Wenn ihr demnach den Werth von y^2 durch x aus der Gleichung für die gegebene Figur setzet und das Element integriret; so habet ihr den verlangten Inhalt des Cörpers.

Die 25. Aufgabe.

145. Den Conum zu cubiren.

Auflösung.

Weil der Conus von einem Triangel beschrieben wird (§. 35. *Geom.*), so habet ihr (wenn

(wenn die Höhe des Triangels a, die Grundlinie r ist)

$$rx = ay$$

$$r^2x^2 : a^2 = y^2$$

$$py^2dx : 2r = prx^2dx : 2a^2$$

$$\int py^2dx : 2r = prx^3 : 6a^2$$

Wenn ihr den gantzen Kegel verlanget, so setzet a für x, und ihr findet seinen Inhalt $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}pra = \frac{1}{2}pr\frac{1}{3}a$, das ist, wenn ihr die Grundfläche $\frac{1}{2}pr$ durch den dritten Theil der Höhe $\frac{1}{3}a$ multipliciret.

Die 26. Aufgabe.

146. Die Kugel zu cubiren.

Auflösung.

Die Kugel wird von einem halben Circul beschrieben (§. 27. *Geom.*), in welchem (§. 198. *P. I.*).

$$2rx - xx = yy$$

daher ist $py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$

$$\int py^2dx : 2r = \frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r$$

Wenn ihr die gantze Kugel verlanget, so setzet $2r$ oder den Diameter für x oder die Hö-

he des Kugelstückes, und ihr bekommet für ihren Inhalt $2pr^2 - 8pr^2 : 6 = 4pr^2 : 6 = \frac{2}{3}pr^2$.

Zusatz.

147. Der Inhalt eines umschriebenen Cylinders, dessen Höhe nemlich dem Diameter, die Grundfläche dem grösten Circul der Kugel gleichet, ist pr^2, und demnach verhält er sich zur Kugel wie pr^2 zu $\frac{2}{3}pr^2$, das ist, wie 3 zu 2.

Die 27. Aufgabe.

148. Einen parabolischen Afterkegel zu cubiren.

Auflösung.

In der Parabel ist

$$y^2 = ax$$

daher

$$py^2dx : 2r = apxdx : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = apx^2 : 4r = py^2x : 4r$$

Wenn die Höhe des gantzen Kegels b und der halbe Diameter in der Grundfläche r ist; so ist der Inhalt desselben $bpr^2 : 4r = \frac{1}{4}bpr$.

Zusatz.

149. Da nun der umschriebene Cylinder $\frac{1}{2}bpr$ ist, so verhält sich dieser zu dem parabolischen Afterkegel wie $\frac{1}{2}bpr$ zu $\frac{1}{4}bpr$, das ist, wie 2 zu 1.

Die

Die 28. Aufgabe.

150. Unendliche parabolische Afterkegel auf einmahl zu cubiren.

Auflösung.

Es sey der Parameter = 1, so ist für unendliche Parabeln.

$$y^m = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y^2 = x^{2:m}$$

$$py^2dx : 2r = px^{2:m}dx : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = mpx^{2+m,:m} : (4+2m)r = mpx$$

$$y^2 : (2m+4)r$$

Die 29. Aufgabe.

151. Eine elliptische Afterkugel zu cubiren.

Auflösung.

Es sey der kleine Diameter in der Ellipsi $2r$, der grosse $= 2a$, so ist

$$yy = rr - r^2x^2 : a^2 \quad (\S.\ 253.\ P.\ I.)$$

$$py^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}prdx - prx^2dx : 2a^2$$

$$\int py^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}prx - prx^3 : 6a^2$$

Setzet für x die gantze grosse Axe $2a$, so kommt der Inhalt des gantzen Cörpers $apr - \frac{2}{6}apr = \frac{4}{6}apr = \frac{2}{3}apr$.

Der 1. Zusatz.

152. Der umschriebene Cylinder ist apr (§. 221. *Geom.*) und demnach verhält er sich zu der elliptischen Afterkugel wie apr zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie 1 zu $\frac{2}{3}$, oder 3 zu 2.

Der 2. Zusatz.

153. Die Kugel, deren Diameter dem grossen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $2a^3p:3r$ (§. 147.). Demnach verhält sie sich zu der elliptischen Afterkugel wie $2a^3p:3r$ zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie a^2 zu r^2, oder wie das Quadrat der grossen Axe zu dem Quadrate der kleinen.

Der 3. Zusatz.

154 Die Kugel, deren Diameter dem kleinen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $\frac{2}{3}pr^2$ (§. 147.). Derowegen verhält sie sich zu der elliptischen Afterkugel wie $\frac{2}{3}pr^2$ zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie r zu a, oder die kleine Axe zu der grossen.

Die 30. Aufgabe.

155. Einen hyperbolischen Afterkegel zu cubiren.

Auflösung.

Es sey die Zwerchaxe $= 2a$, die kleine Axe $= 2r$,

$= 2r$, die Abscisse $= x$, die Semiordinate $= y$, so ist (§. 269. *P. I.*)

$$rr : aa = y^2 : 2ax + xx$$

$$y^2 = (2ar^2x + r^2x^2) : a^2$$

$$py^2dx : 2r = prxdx : a + prx^2dx : 2a^2$$

$$\int py^2dx : 2r = prx^2 : 2a + prx^3 : 6a^2$$

Setzet für x die gantze Höhe des Afterkegels b, so kommt sein Inhalt $prb^2 : 2a + prb^3 : 6a^2$.

Die 31. Aufgabe.

156. Den Inhalt des Cörpers zu finden, der erzeuget wird, indem der Raum zwischen der Logarithmischen Linie MI und der geraden Linie PH sich um PH herum beweget. Tab. IX. Fig. 81.

Auflösung.

In der Logarithmischen Linie, deren Subtangens $= a$, ist

$$ydx = ady \quad (\S.\ 112.)$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2dx : 2r = apy^2dy : 2ry = apydy : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = apy^2 : 4r$$

Nehs-

Nehmet r für die letzte Semiordinate AB an, so ist der Inhalt des gantzen Cörpers $\frac{1}{4}apr$, der durch die Bewegung des unendlichen Raumes IBAH beschrieben wird.

Die 32. Aufgabe.

157. Den Inhalt eines Cörpers zu finden, der beschrieben wird, indem sich eine halbe Parabel ANS um ihre Semiordinate beweget.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 75. In diesem Falle ist das Element gleich dem Producte aus einem Circul, der mit MT der Differentz zwischen der Abscisse AP und AS beschrieben wird, in die Differential der Semiordinate. Setzet nun AS $=r$, NS $=b$, AP $=x$, so ist PS $=$ MT $=r-x$. Wenn nun die Verhältniß des Radii zur Peripherie $r:p$, so findet ihr die Peripherie, so mit MT beschrieben worden $(rp-px):r$, folgends den Circul $(r^2p-2rpx+px^2):2r$. Dannenhero ist das Element $(r^2pdy-2rpxdy+px^2dy):2r$. Nun ist in der Parabel, wenn der Parameter $=1$, $y^2=x$ (§. 217. *P. I.*) und $y^4=x^2$. Daher das Element $\frac{1}{2}rpdy-py^2dy+py^4dy:2r$, dessen Integral $\frac{1}{2}rpy-\frac{1}{3}py^3+py^5:10r$ das Stücke des Cörpers exprimiret, welches von MNT beschrieben worden.

Wenn

Wenn ihr für y^2 seinen Werth x setzet, so habet ihr für eben dasselbe Stücke $\frac{1}{2}rpy - \frac{1}{3}pxy + px^2y : 10r$. Setzet nun ferner r für x und b für y; so bekommet ihr für den gantzen Cörper $\frac{1}{2}rpb - \frac{1}{3}prb + pr^2b : 10r = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10})bpr = \frac{4}{15}bpr$.

$$bpr = \frac{(30 - 20 + 6)}{60}bpr = \frac{4}{15}bpr.$$

Anmerckung.

158. Auf gleiche Weise könnet ihr den Inhalt der Cörper finden, wenn ihr setzet, daß sich eine Fläche um eine andere Linie, als z. E. um den Tangentem oder die Subnormallinie beweget.

Von der verkehrten Methode der Tangentium.

Die 9. Erklärung.

159. Die verkehrte Methode der TANGENTIUM (Methodus Tangentium inversa) ist diejenige, welche zeiget, wie man aus dem gegebenen Subtangente, Tangente, der Normallinie oder Subnormallinie ꝛc. die Gleichung finden kan, welche die Natur der Linie erkläret.

Zusatz.

160. Setzet nemlich die gegebenen Linien ihrem Werthe gleich, darinnen die Differentialgrössen anzutreffen sind, so bekommet ihr die Differentialgleichung für die gesuchte Linie. Wenn ihr nun selbige integriret, so bekommet ihr die gesuchte Gleichung.

Die

Die 33. Aufgabe.

161. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangens $= 2yy : a$.

Auflösung.

Weil der Subtangens in einer jeden algebraischen Linie $= ydx : dy$, so ist

$$2y^2 : a = ydx : dy$$

$$2y^2 dy = aydx$$

$$2ydy = adx$$

$$y^2 = ax$$

Welche Gleichung zeiget, daß die verlangte Linie eine Parabel sey.

Anmerckung.

162. Hätte man gesagt, daß der Subtangens solte $2x$ seyn, (ich setze aber beständig, wie vorhin, daß x allezeit die Abscisse, y die Semiordinate bedeute); so bekämet ihr $ydx = 2xdy$. Wollet ihr nun diese Gleichung zum integriren geschickt machen, so sehet ihr, daß, wenn ihr x durch y exprimiren wollet, ihr y^2 durch eine beständige Grösse dividiren müsset, und dannenhero für $2x$ annehmen $2y^2 : a$.

Die 34. Aufgabe.

163. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormallinie beständig von einer Grösse ist, z. E. $= a$.

Auf-

Auflösung.

Die Subnormallinie ist $ydy : dx$ (§. 46.).
Demnach

$$ydy : dx = a$$
$$ydy = adx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$
$$y^2 = 2ax$$

Also ist die verlangte Linie eine Parabel, deren Parameter der doppelten Subnormallinie gleich ist.

Die 35. Aufgabe.

164. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangens die mittlere Proportionallinie ist zwischen x und y.

Auflösung.

Es ist $ydx : dy = \sqrt{xy}$

$$ydx = dy\sqrt{xy} = x^{1:2}y^{1:2}dy$$
$$dx = y^{-1:2}x^{1:2}dy \quad \Big| \; x^{1:2}$$
$$x^{-1:2}dx = y^{-1:2}dy$$
$$2x^{1:2} = 2y^{1:2}$$

$\sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{x} = \sqrt{y}}{x = y}$$

Also ist die verlangte Figur ein gleichschenckelichter rechtwinklichter Triangel. Ihr könnt aber auch setzen

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{y}}{x + 2\sqrt{ax} + a = y}$$

so ist

$$\frac{2\sqrt{ax} = y - x - a}{4ax = y^2 - 2yx + xx + 2ax - 2ay + aa}$$

$$y^2 - 2yx + x^2 - 2ax - -2ay + aa = 0$$

welches eine Gleichung an dem Circul ist, darinnen der Ursprung von x und y auf besondere Weise (§. 362. *P. I.*) zu determiniren.

Ihr könnet auch setzen, daß $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{y}$.

Die 36. Aufgabe.

165. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormallinie $= r - x$.

Auflösung.

Es ist

$$\frac{y\,dy : dx = r - x,}{y\,dy = r\,dx - x\,dx}$$

$$\frac{\frac{1}{2}y^2 = rx - \frac{1}{2}x^2}{y^2 = 2rx - xx}$$

Also ist die verlangte Linie ein Circul, dessen Diameter $= 2r$.

Die 37. Aufgabe.

166. Eine Linie zu finden, deren Subnormallinie $= \sqrt{ax}$.

Auflösung.

Es ist $ydy : dx = \sqrt{ax} = a^{1:2} x^{1:2}$

$$\frac{ydy = a^{1:2} x^{1:2} dx}{\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{ax^3}}$$

$$y^2 = \frac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \frac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Also ist das Quadrat der Semiordinate in dieser Linie jederzeit einem parabolischen Raume gleich (§. 91.), und also die quadratrix parabolæ, weil durch ihre Semiordinaten die Parabel quadriret wird, deren Parameter $4a$.

Die 38. Aufgabe.

167. Eine krumme Linie zu construiren, deren Subtrangens einer unveränderlichen Linie gleich ist.

Auflösung.

Es ist

$$\frac{ydx : dy = a}{dx = ay^{-1}\,dy}$$
$$\int dx = \int ay^{-1}\,dy$$

Wenn ihr $ay^{-1}\,dy$ (§. 82.) integriren woltet, so käme heraus $ay^{\circ} : o = a : o$, das ist, eine unendliche grosse Grösse. Und also gehet die Integration algebraisch nicht an. Da nun aber bekannt ist (§. 61.), daß die angenommene Eigenschaft der Logarithmischen Linie zugehöret, in dieser aber die Abscissen x die Logarithmi der Semiordinaten sind (§. 307. *P. I.*); so muß auch $\int ay^{-1}\,dy\,(=x)$ der Logarithmus der Semiordinate seyn, und dannenhero könnet ihr jederzeit für die Integral von $ay^{-1}\,dy$ oder $ady : y$ den Logarithmum von y oder ly setzen. Es muß aber der Logarithmus in einer Logarithmischen Linie genommen werden, deren Subtangens a ist

Der 1. Zusatz.

168. Da nun die Differential eines Logarithmi $= ady : y$, so könnet ihr jetzt auch diejenigen Grössen differentiiren, in welchen Logarithmi zu finden. Es sey z. E. ly^n, so ist die Differential $nly^{n-1}ady : y$.

Der 2. Zusatz.

169. Es sey die Differential eines Logarithmi $= dy : (1+y)$; so ist der Logarithmus der Zahl $1+y = \int dy : (1+y)$. Nun ist $1 : (1+y)$

$+y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ u. s. w. wie ihr es findet, wenn ihr in der That dividiret, und daher $dy:(1+y) = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy$ &c. Derowegen ist $\int dy:(1+y)$ oder der Logarithmus von der Zahl $1+y = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.

Der 3. Zusatz.

170. Weil nun $l = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. so findet ihr (§. 137.); $y = l + \frac{1}{1}l^2 + \frac{1}{1.2}l^3 + \frac{1}{1.2.3}l^4 + \frac{1}{1.2.3.4}l^5$ &c.

Der 4. Zusatz.

171. Ihr sehet zugleich (§. 169.), wie die Differentiale der Logarithmischen Grössen integriret werden, wenn man a für den Subtangentem der Logarithmischen Linie annimmt. Es ist z. E. $\int y^n dy:y = y^{n+1}:(n+1)a$, $\int ydy\sqrt{(aa+y^2)}:ay = (aa+y^2)^{3:2}3a$ u. s. w.

Anmerckung.

172. Wenn man die Differentialgleichung nicht integriren kan, so suchet man dieselbe auf die Quadratur oder Rectification des Circuls, oder Parabel, Hyperbel und Ellipsis zu reduciren, weil diese Linien bekant sind, und ist vergnüget, wenn man sagen kan, daß die Construction der verlangten Linie von der Quadratur oder Rectification einer von den gemeldeten Linien dependire: wovon ich noch einige Exempel hieher setzen muß. Ihr habet euch aber zu

dem Ende alle Elemente der Flächen und Längen in den Kegelschnitten bekant zu machen, damit ihr um so viel leichter wahrnehmet, auf was für eine Quadratur oder Rectification sich jeder vorkommende Fall reduciren lasse.

Die 39. Aufgabe.

173. Eine krumme Linie zu construiren, in welcher $dz = qdu$.

Auflösung.

Es bedeutet q eine Grösse, die aus veränderlichen und unveränderlichen in Gestalt eines Bruches zusammen gesetzet ist. Beschreibet in unendlichen Fällen, die unter der gegebenen Gleichung begriffen sind, eine krumme Linie, deren Abscissen $= v$, die Semiordinate $= aq$; so ist das Element dieser Linie $aqdu$. Wenn ihr nun dieses durch a dividiret, so bekommet ihr qdu. Derowegen richtet auf eben der Axe für die Abscissen u andere Semiordinaten auf, die $= \int qdu$, das ist, dem Raume gleich sind, der zwischen dieser krummen Linie und ihren Coordinaten enthalten, wenn man ihn durch eine unveränderliche Grösse a dividiret, so bekommt ihr die Linie, deren Differential-Gleichung $dz = qdu$.

Der 1. Zusatz.

174. Es sey $ydx = ady$ oder $dx = ady : y$, so sind die Semiordinaten der Linie von deren Quadratur die Construction dependiret, $aa : y$. Da nun die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten (§. 283. P. I.)

P. I.) $aa = zy$: so erkennet ihr daraus die Art der Linie

Der 2. Zusatz.

175. Wenn in der verlangten Linie der Subtangens $= y\sqrt{(aa+yy)} : a$, so ist $dx = dy\sqrt{(aa+yy)} : a$. Also sind die Semiordinaten der Linie, von deren Quadratur die Construction dependiret, $\sqrt{(aa+yy)}$. Woraus ihr abermahl erkennet, daß es eine gleichseitige Hyperbel sey, denn es sey AC = CB = a, CQ = PM = y, QM = CP = x; so ist AP = $x - a$, BP = $a + x$, folgends AP.PB = $x^2 - a^2$ und $y^2 = x^2 - a^2$ (§. 290. P. I.), und daher $x = \sqrt{(y^2 + a^2)} = QM$. Tab. VI. Fig. 53.

Ende des dritten Theiles.

Der vierte Theil von den Anfangs-Gründen der Exponential- und Differentio-Differential-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

176.

Die Exponential-Rechnung bestehet im Differentiiren und Integriren solcher Grössen, die einen veränderlichen Exponenten haben, als x^x, a^x, und Exponentialgrössen genennet werden.

Die 1. Aufgabe.

177. Eine Exponentialgrösse zu differentiiren.

Auflösung.

Die gantze Kunst kommt darauf an, daß man die Exponentialgrössen auf Logarithmische reduciret, und sie (§. 168.) differentiiret. Setzet nemlich

$$x^y = z$$

so

so ist $ylx = lz$

$lxdy + ydx : x = dz : z$ (§. 168.)

$z(lxdy + ydx : x) = dz$

das ist $\overset{y}{x}(lxdy + ydx : x) = dz$

oder $\overset{y}{x} lxdy + y\overset{y-1}{x} dx = dz$

Setzet abermahls

$$v = \overset{y}{x}$$

so ist $x^y lv = lz$

$(\overset{y}{x} lxdy + y\overset{y-1}{x} dx) lv + \overset{y}{x} dv : v = dz : z$

$z(\overset{y}{x} lxdy + y\overset{y-1}{x} dx) lv + z\overset{y}{x} dv : v = dz$

$$v^{\overset{y}{x}} \overset{x}{x}^{\overset{y}{x}} lxlvdy + v^{\overset{y}{x}} y\overset{y-1}{x} lvdx + v^{\overset{y}{x}} v^{-1} \overset{y}{x} dv = dz$$

Auf gleiche Weise verfahret ihr in anderen Fällen.

Die 2. Erklärung.

178. Eine Exponential-Linie wird genennet eine krumme Linie, welche durch eine Exponential-Gleichung erkläret wird, als wenn $x^x = y$.

Zusatz.

179. Wenn ihr die Exponential-Gleichung differentiiret (§. 177.) und den Werth von dx in dem Differential-Werthe des Subtangentis und der Subnormallinie substituiret; so findet ihr wie in den algebraischen Linien ihren Subtangentem und ihre Subnormallinie. Es sey z. E.

$$x^x = y \text{ so ist}$$

$$ylxdx + ydx = dy$$

$$dx = dy : (ylx + y)$$

$$ydx : dy = ydy : (ylx + y)\, dy = 1 : (1 + lx)$$

Für die Subnormallinie ist

$$ydy : dx = (y^2 lxdx + y^2 dx) : dx = y^2 lx + y^2 = y^2(lx + 1).$$

Die 2. Aufgabe.

180. Die Differential einer logarithmischen Grösse zu integriren.

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $xlxdx$ integriren. Setzet

$$x = 1 + y$$

So ist $lx = l(1+y)$

$dx = dy$

$xlxdx = l(1+y)(1+y)dy.$

Nun ist $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. Derowegen $l(1+y)(1+y)\,dy = (1+y)\,dy\,(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.) = (wenn man in der That multipliciret).

$ydy - \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1}{3}y^3dy - \frac{1}{4}y^4dy + \frac{1}{5}y^5dy$ &c.
$+ y^2dy - \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy - \frac{1}{4}y^5dy$ &c.

das ist, $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

folgends die verlangte Integral $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{2.3.4}y^4 + \frac{1}{3.4.5}y^5 - \frac{1}{4.5.6}y^6$ &c. in welcher Reihe $y = x - 1$.

Auf gleiche Manier könnet ihr in anderen Fällen verfahren.

Die 3. Aufgabe.

181. Eine Exponential-Grösse zu integriren.

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $(1+y)^{1+y}dy$ integriren.

Setzet

$$\frac{(1+y)^{1+y}}{} = \frac{1+v}{}$$

so ist $(1+y)l(1+y) = l(1+v)$

folgends (§. 169.)

$$y + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{12}y^4 - \tfrac{1}{20}y^5 \text{ &c.} = v - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 - \tfrac{1}{4}v^4 + \tfrac{1}{5}v^5 \text{ &c.}$$

Setzet ferner

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ &c.}$$

so ist
$$v^2 = +y^2 + 2ky^3 + k^2y^4 + 2kmy^5 \text{ &c.}$$
$$+2my^4 + 2ny^5 \text{ &c.}$$

$$v^3 = +y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5 \text{ &c.}$$
$$+3my^5$$

$$v^4 = +y^4 + 4ky^5 \text{ &c.}$$

$$v^5 = y^5 \text{ &c.}$$

(§. 91. *P. I.*)

Daher

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ &c.}$$
$$-\tfrac{1}{2}v^2 = -\tfrac{1}{2}y^2 - ky^3 - \tfrac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5 \text{ &c.}$$
$$-my^4 - ny^5$$
$$+\tfrac{1}{3}v^3 = +\tfrac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5 \text{ &c.}$$
$$+my^5$$
$$-\tfrac{1}{4}$$

$$-\tfrac{1}{4}v^4 \equiv \quad -\tfrac{1}{4}y^4 - ky^5 \text{ &c.}$$
$$+\tfrac{1}{5}v^5 \equiv \quad +\tfrac{1}{5}y^5 \text{ &c.}$$
$$-y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{6}y^3-\tfrac{1}{12}y^4+\tfrac{1}{20}y^5 \text{ &c.} = 0$$

Man bekommt demnach

$$\frac{1-1=0}{1=1} \qquad \frac{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0}{k=1} \qquad \frac{m-k+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=0}{m=1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{n-\frac{1}{2}k^2-m+k-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=0}{n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=0}$$
$$n=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{4}{12}=\tfrac{1}{3}$$

$$\frac{p-km-n+k^2+m-k+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=0}{p=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{5}-\frac{1}{20}}$$
$$p=\tfrac{1}{3}-\tfrac{5}{20}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{4}{12}-\tfrac{3}{12}=\tfrac{1}{12}$$

Demnach ist $(1+y)^{1+y}=1+v=1+y+y^2+\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}y^4+\frac{1}{12}y^5$ &c. folgends $(1+y)^{1+y}dy=dy+ydy+y^2dy+\frac{1}{2}y^3dy+\frac{1}{3}y^4dy+\frac{1}{12}y^5dy$ &c. Und daher $\int(1+y)^{1+y}dy=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{8}y^4+\frac{1}{15}y^5+\frac{1}{72}y^6$ &c.

Zusatz.

182. Wenn ihr die Differential einer Exponential-Grösse integriren könnet, so kön-

könnet ihr auch die Exponential-Linien quadriren.

Die 3. Erklärung.

183. Differentio-differentiiren heisset so viel als die Differential von einer Differential-Grösse finden.

Zusatz.

184. Wenn die Differential dx ist, so nennet ihre Differential oder die Differentio-Differential von x, ddx; die Differential von ddx aber $dddx$ u. s. w.

Die 4. Aufgabe.

185. Eine jede gegebene Differential-Grösse von neuem zu differentiiren.

Auflösung.

Es geschiehet nach den Regeln (§. 13. & seqq.) nach welchen die veränderlichen Grössen differentiiret werden, nur daß man eine Differential-Grösse meistentheils als eine unveränderliche annimmt und daher auch die andere Differential vor nichts hält (§. 4.).

Z. E. Die andere Differential von xdx findet ihr $dx^2 + xddx$ (§. 16.); $d(1:dx) = -ddx:dx^2$ (§. 24.); $d(ydy:dx) = (dy^2 + yddy):dx$, wenn ihr dx unveränderlich annehmet, hin-

hingegen $= (dy^2dx - ydyddx) : dx^2 = dy^2 : dx - ydyddx : dx^2$ (§. 24.), wenn ihr dy unveränderlich annehmet; $d\sqrt{(dx + dy^2)} = dydy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ wenn dx unveränderlich; hingegen $dxddx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, wenn dy unveränderlich (§. 20.) u. s. w.

Anmerckung.

186. Wenn die Rechnung auf gewisse Fälle applicret wird, so ist nicht schwer zu sehen, welche Differential ihr für unveränderlich annehmen könnet.

Die 4. Erklärung.

187. Wenn eine krumme Linie AFK anfangs die Kohle, hernach die erhabene Seite gegen die Axe AE kehret, und immer in einem mit der Axe fortgehet, so heisset der Punct F, wo die Wendung geschiehet, der Wendungspunct; hingegen der Wiederkehrpunct; wenn sie wieder zurück gegen die Axe kehret. Im Lateinischen nennet man diese Puncte: Puncta flexus contrarii. Tab. X. Fig. 86.

Der 1. Zusatz.

188. Wenn die krumme Linie einen Wendungs-Punct hat, so ist klar, daß die Linie AT zunimmt mit der Abscisse AP, bis diese in E kommt, denn so bald sich die Linie wendet, so nimmt die Linie AT wieder ab, und die Abscisse nimmt wie vorhin zu. Derowegen

kön-

könnet ihr AL als die gröste Linie von ihrer Art ansehen.

Der 2. Zusatz.

189. Hingegen wenn die krumme Linie einen Wiederkehrungs-Punct hat, so wächset anfangs die Linie AT zugleich mit der Abscisse bis in L: nach diesem, wenn die Linie sich wendet, nimmt die Linie AT zu, hingegen die Abscissen gehen wieder zurück und nehmen ab, und dannenhero muß in diesem Falle die Linie AE die gröste von ihrer Art werden.

Der 3. Zusatz.

Tab. X. Fig. 86.

190. Da nun $AL = (ydx : dy) - x$ (§. 36.), so ist, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet (§. 185.),

$$\frac{(dy^2dx - ydxddy) : dy^2 - dx = o}{dy^2dx - ydxddy - dy^2dx = o}$$

$$\frac{-ydxddy = o}{-y}$$

$$ddy = o, \text{ oder } ddy = \infty \text{ (§. 64.).}$$

Der 4. Zusatz.

Tab. X. Fig. 87. 88.

191. Wenn die Semiordinaten BM aus einem Puncte B gezogen sind, so ziehet Bm und BM unendlich nahe, und Br auf Bm perpen-

pendicular: dann ist klar, daß an der hohlen Seite Br grösser ist als BO, hingegen an der erhabenen kleiner wird. Derowegen ist in dem Wendungspuncte tO = o. Beschreibet nun aus dem Mittelpuncte B den Bogen TH und MR, so sind die Triangel mMR, MBT und THO einander ähnlich, (§. 183. *Geom.*), weil nemlich bey R, H (§. 48.) und B rechte Winkel sind, und über dieses HOT = MTB und MmR = MTB, indem beyde von MTB nur um einen unendlichen kleinen Winkel HBT und MBm unterschieden sind (§. 101. *Geom.*), und die Ausschnitte des Circuls sind, weil die Winkel MBm und HBT mit HBMeinen rechten Winkel machet, auch einander ähnlich. Demnach ist (§. 183. *Geom.*),

$$mR : MR = BM : BT$$
$$dy : dx = y : ydx : dy$$
$$BM : BT = MR : TH$$
$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy}$$
$$BM : BT = TH : HO$$
$$\text{daher } MR : TH = TH : NO$$
$$da : \frac{dx^2}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : \frac{dx^3}{dy^2}$$

Also ist die Differential von BT oder tH wenn ihr *dx* für unveränderlich annehmet,

= (*d*

$= (dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 185.) dannenhero $OH + tH = Ot = dx^3 + dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$. Da nun die Linie rO im Wendungspuncte nichts wird, so ist

$$\frac{(dx^3 + dxdy^2 - ydxddy) : dy^2 = o}{dx^2 + dy^2 - yddy = o \text{ oder } = \infty}$$

Die 5. Aufgabe.

192. Den Wendungspunct in einer Linie zu finden, da die Semiordinaten mit einander parallel sind.

Auflösung.

Tab. X. Fig. 86.

Weil in diesem Falle $ddy = o$, so suchet diesen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie durch x, und ihr werdet daraus den Werth von AE, das ist, der Abscisse finden, welcher die aus dem Wendungspuncte F gezogene Semiordinate EF, zugehöret.

Der 1. Zusatz.

193. Es sey $axx = xxy + aay$

$$\frac{ax^2}{x^2 + a^2} = y$$

$$\frac{2a^3xdx}{(x^2 + a^2)^2} = dy$$

Wenn

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist:

$$(2a^3dx^2(xx+aa)^2 - 8a^3x^4dx^2 - 8a^5x^2dx^2) : (x^2+a^2)^4 = ddy = o.$$

und wenn ihr mit $(xx+aa)dx^2 : (x^2+a^2)$ dividiret

$$2a^3x + 2a^5 - 8a^3x^2 = o.$$

das ist $2a^5 - 6a^3x^2 = o$

folgends $a^2 - 3x^2 = o$

und $\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x$

Setzet ihr diesen Werth in die Stelle von x in der Gleichung

so ist $y = axx : (xx+aa)$

$y = \frac{1}{3}a^3 : (\frac{1}{3}aa + aa) = \frac{1}{3}a^3 : (\frac{4}{3}aa)$
$= a^3 : 4aa = \frac{1}{4}a$

Solchergestalt könnet ihr den Wendungspunct finden, auch wenn die krumme Linie nicht beschrieben ist

Der 2. Zusatz.

194. Es sey

$$y - a = (x-a)^{3:5}$$

so ist $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-2:5}dx$

$ddy = -\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = 0$

Wenn nemlich dx unveränderlich angenommen wird: folgends

$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5} = 0$

$-6 = 0$

Weil ihr keinen Werth von x findet, so setzet

$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = \infty$

das ist $-6dx^2 : 25\sqrt[5]{(x-a)^7} = \infty$

folgends $25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$

$x-a = 0$

$x = a$

Der 3. Zusatz.

195. In der Parabel ist

$x = y^2$

$x^{1:2} = y$

$\frac{1}{2}x^{-1:2}dx = dy$

$$\frac{-\frac{1}{4}x^{-3:2}dx^2 = ddy = 0}{\frac{1}{\frac{4\sqrt{x^3}}{1} = 0}}$$

Setzet ferner

$$\frac{-dx^2}{\frac{4\sqrt{x^3}}{} = \infty}$$

so ist $\sqrt{x^3} = 0$

Da ihr nun keinen Werth von x findet, ihr möget $ddy = 0$ oder $ddy = \infty$ setzen; so hat die Parabel keinen Wendungspunct.

Die 6. Aufgabe.

196. Den Wendungspunct in einer krummen Linie zu finden, deren Semiordinaten alle aus einem Puncte gezogen werden.

Auflösung.

Weil in diesem Falle $dx^2 + dy^2 - ydy = 0$ (§. 191.); so dörffet ihr nur aus der gegebenen Gleichung für die Linie den Werth von dy durch dx exprimiren, und ihr werdet wie vorhin den Werth von x in unveränderlichen Grössen finden können.

Zusatz.

197. Es sey in der Conchoide des Nicomedis $BA = a$, $BC = b$, $Cq = z$, $CM = y$, so ist (§. 296. *P. I.*). Tab. IX. Fig. 79.

$$\frac{z+a=y}{dz=dy}$$

Ferner ist Bq$=\sqrt{(zz-bb)}$ und weil bey t und B rechte Winkel sind, die Winkel S und q aber, deren Unterschied qCS unendlich klein ist, einander gleich seyn, (§. 183. *Geom.*).

Bq : BC = St : tq

$\sqrt{(zz-bb)} : b = dz : bdz : \sqrt{(zz-bb)}$

und weil die Ausschnitte Cqt und CMr ähnlich sind,

Cq : qt = CM : Mr

$z : bdz = z+a : \mathrm{Mr}$

$$\frac{}{\sqrt{(zz-bb)}}$$

demnach ist $\mathrm{Mr} = (z+a)bdz : z\sqrt{(zz-bb)} = dx$, folgends

$$\frac{(z+a)bdz = zdx\sqrt{(zz-bb)}}{dz=dy=zdx\sqrt{(zz-bb)} : (bz+ab).}$$

Wenn man demnach dx für unveränderlich annimmt, so ist $ddy=(bz+ab)\sqrt{(z^2-b^2)}$ $dzdx:(bz+ab)^2+(bz^3+abz^2)dzdx:(bz+ab)^2$ $\sqrt{(z^2-b^2)}-bzdzdx\sqrt{(z^2-b^2)}:(bz+ab)^2=$ $abdzdx\sqrt{(z^2-b^2)}:(bz+ab)^2+(bz^3+abz^2)$ $dzdx:(bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)}=(2abz^2--ab^3+$ $bz^3)dzdx:(ab+bz)^2\sqrt{(z^2-b^2)}=$ (wenn man für dz seinen Werth setzet), $(2abz^3-ab^3z+$ $bz^4)dx^2:(ab+bz)^3$.

Setzet

Setzet nun in der Gleichung $yddy = dx^2 + dy^2$ (§. 191.) die gehörigen Werthe an ihre Stelle, so habt ihr

$$(ab+bz).(2az^3 - ab^2z + z^4)\,dx^2 : (ab+bz)^3 = dx^2 + (z^4 - b^2z^2)\,dx^2 : (ab+bz)^2$$

$$2az^3 - ab^2z + z^4 = (ab+bz)^2 + z^4 - b^2z^2 = a^2b^2 + 2ab^2z + z^4$$

$$2az - 3ab^2z - a^2b^2 = 0$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0 \qquad 2a$$

Suchet endlich aus dieser Gleichung die Wurtzel (§. 366. 372. *P. I.*). Wenn ihr diese mit a vermehret, so habt ihr die verlangte Linie CM ($= z + a$), welche den Wendungspunct determiniret.

Die 5. Erklärung.

198. Wenn eine krumme Linie BDF mit einem Faden überleget ist, so immer gleichviel gedehnet wird und die gerade Linie BA anfangs die krumme in B berühret, hernach aber immer nach und nach von der krummen abgezogen wird, so beschreibet der äussere Punct A eine andere krumme Linie AHR, und nennet man die krumme Linie BDF die Evolute der Linie AHR, die Theile des Fadens DH, RF &c. aber die RADIOS der Evolute. Tab. X. Fig. 89.

Der 1. Zusatz.

199. Wenn der Punct A in B fället und AB $=o$, so ist DH oder der Radius der Evolute dem Bogen BD, sonst aber der Summe aus dem Bogen DB und der Linie AB gleich.

Der 2. Zusatz.

Tab. X. Fig. 89.

200. Ihr könnet jeden unendlich kleinen Bogen der Linie AHR als einen Circulbogen ansehen, der mit dem Radio DH, oder FR &c. aus dem Mittelpuncte D oder F &c. beschrieben worden, und demnach stehen die Radii der Evolute alle auf der Linie AHR perpendicular (§. 48.).

Der 3. Zusatz.

201. Weil nur so lange ein Circulbogen beschrieben wird, als der Radius der Evolute DH mit einem unendlich kleinen Bogen in der Evolute BDF eine gerade Linie machet; so müssen alle Radii die Evolute BDF berühren (§. 28.).

Die 7. Aufgabe.

Tab. X. Fig. 90.

202. Die Länge des Radii der Evolute MC zu finden, wenn die Semiordinaten PM der Linie AMD auf der Axe AB perpendicular stehen.

Auflösung.

Es sey die Semiordinate pm der anderen PM unendlich nahe, ingleichen der Radius Cm dem Radio CM. Ziehet CE mit der Axe AB parallel, bis sie die verlängerte Semiordinate

in

in E erreichet. Weil bey R und E rechte Winkel sind, und RMm = EMC, indem EMG und CMm (§. 200.) rechte Winkel seyn, so ist (§. 183. *Geom.*).

$$MR : Mm = ME : MC$$
$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$$

Da nun der Mittelpunct in C ist, daraus der kleine Bogen Mm mit dem Radio CM beschrieben wird, und dieser unverändert bleibet, indem ME um mR zunimmt; so muß die Differential des Radii CM in Ansehung der Differential mR der Linie ME nichts seyn. Nun ist die Differential des Radii CM, wenn ihr dx für unveränderlich (das ist in allen Puncten der Linie von gleicher Grösse) annehmet, $dzdx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx^2 + zdyddydx : dx^2\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Derowegen habt ihr

$$\frac{(dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0}{dzdx^2 + dzdy^2 = -zdyddy}$$
$$\frac{}{(dzdx^2 + dzdy^2) : -dyddy = z}$$

das ist, weil $dz = dy$

$$(dx^2 + dy^2) : -ddy = z.$$

Wenn ihr nun die Werthe von dy^2 und ddy durch x aus der Gleichung für die krumme Linie exprimiret, so werdet ihr den Werth von z durch x finden.

Der 1. Zusatz.

203. In der Parabel ist

$$ax = y^2$$

daher $adx = 2ydy$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

das ist $adx^2 : 4x = dy^2$

Und wenn ihr dx für unveränderlich annehmet

$$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy.$$

Tab. X. Fig. 90. Folgends $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (4xdx^2 + adx^2)x\sqrt{ax} : axdx^2 = (a + 4x)\sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax} : a = z = y + 4xy : a =$ PM + PE. Es ist aber PM $= y$ und daher PE $= 4xy : a$.

Der 2. Zusatz.

204. Es sey für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

so ist $my^{m-1}dy = dx$.

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist:

(m

$$\frac{(mm-m)y^{m-2}dy^2+my^{m-1}ddy=0}{(mm-m)y^{m-2}dy^2=-my^{m-1}ddy}$$
$$(m-1)y^{-1}dy^2=-ddy$$

das ist $(m-1)dy^2:y=-ddy$. Demnach ist $(dx^2+dy^2):-ddy=(ydx^2+ydy^2):(m-1)dy^2$.

Nun ist $dx^2=m^2y^{2m-2}dy^2$. Derowegen wenn ihr diesen Werth in die Stelle von dx^2 setzet, so bekommet ihr

$$\frac{(m^2y^{2m-1}dy^2+ydy^2):(m-1)dy^2=z}{(m^2y^{2m-1}+y):(m-1)=z.}$$

Setzet z. E. $m=2$, so ist $4x\sqrt{x}+\sqrt{x}=z$. welche Gleichung mit der vorigen übereinkommt, wenn $a=1$.

Anmerckung.

205. Wenn euch das Differentiiren beschwerlich fallen will; so brauchet den Vortheil, dadurch wir oben (§ 24. seqq.) die Regeln zu differentiiren, zu finden, angewiesen.

Ende des vierten Theiles.

Anhang zu der Algebra

darinnen

Ihr Nutzen in verschiedenen Wissenschaften durch Exempel gezeiget wird.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Geschwindigkeit mit welcher sich ein Cörper beweget, ist die Verhältniß des Raumes zu der Zeit.

Zusatz.

2. Es sey der Raum $= r$, die Zeit $= t$ die Geschwindigkeit $= c$, so ist die Geschwindigkeit $= r : t$ und $r = tc$.

Die 2. Erklärung.

3. Die Materie eines Cörpers ist diejenige, welche mit ihm wieget und beweget wird.

Zusatz.

4. Daher ist sie seiner Schwere jederzeit proportional.

Die 3. Erklärung.

5. Die Grösse der Bewegung erwächset, wenn die Materie des Cörpers durch die

die Geschwindigkeit der Bewegung multipliciret wird.

Zusatz.

6. Es sey die Geschwindigkeit des Cörpers $= c$, seine Materie $= m$; so ist die Grösse der Bewegung $= mc$.

Die 1. Aufgabe.

7. Die Lehrsätze zu finden, nach welchen die Bewegungen zweyer Cörper, die sich die ganze Zeit ihrer Bewegung mit einerley Geschwindigkeit bewegen, verglichen werden.

Auflösung.

Es sey der eine Cörper A, seine Geschwindigkeit C, seine Materie M, die Zeit seiner Bewegung T, der Raum, den er durchlauffen, R, die Grösse der Bewegung Q. Der andere Cörper a, seine Geschwindigkeit c, seine Materie m, die Zeit seiner Bewegung t, der Raum, den er durchlauffen, r, die Grösse seiner Bewegung q. So ist $C = R : T$ und $c = r : t$ (§. 2.). $Q = CM$ und $q = cm$ (§. 6.). Solchergestalt habet ihr

I. $C : c = R : r$

$\overline{T} \quad \overline{t}$

II. $Q : q = CM : cm$

Setzet $C = c$, so ist $R : T = r : t$ folgends

III. $R : r = T : t$.

Setzet

Setzet $Q = q$, so ist $CM = cm$. Folgends

IV. $C : c = m : M$

Setzet ferner $T = t$, so ist

V. $R = r$.

Setzet $C = c$, so ist

VI. $M = m$.

Wiederum weil $C : c = (R : T) : (r : t)$ so ist $C Tr = ctR$, folgends

VII. $T : t = cR : Cr$.

VIII. $R : r = TC : tc$.

Setzet $T = t$, so ist $Cr = cR$. Folgends

IX. $C : c = R : r$.

Setzet $R = r$, so ist $CT = ct$. Folgends

X. $C : c = t : T$.

Weil $Q : q = CM : cm$, so ist $Qcm = qCM$, folgends

XI. $C : c = Qm : qM$.

XII. $M : m = Qc : qC$.

Setzet $C = c$, so ist $Qm = qM$. Folgends

XIII. $Q : q = M : m$

Endlich weil

$C : c = (R : T) : (r : t)$

$Q : q = CM : cm$

---

so ist $CQ : cq = tRCM : Trcm$

$CQTrcm = cqtRCM$

$QTrm = qtRM$

dannenhero ist

XIV. $Q : q = tRM : Trm$

XV. $T : t = qRM : Qrm$

XVI.

XVI. R : r = QT m : qtM
XVII. M : m = QT r : qtR.

Anmerckung.

8. Es ist nicht nöthig zu erinnern, wie die gefundenen Lehrsätze ausgesprochen werden, weil solches denen zur Gnüge bekannt seyn muß, die das vorhergehende verstanden. Aber wohl ist nöthig, daß ich ermahne, man solle sich diese Lehrsätze wohl bekant machen, weil man sie in Auflösung anderer Aufgaben gar öfters vonnöthen hat Mercket aber zugleich, wie man so viel Lehrsätze durch die Algebra gleichsam spielend heraus bringen kan, die sonst durch viele Umwege zu erweisen und noch schwerer zu erfinden wären.

Die 2. Aufgabe.

9. Die Gesetze zu finden, nach welchen die schweren Cörper in einem Raume, da ihnen kein Widerstand geschiehet, herunter fallen.

Auflösung.

I. Es ist aus der Erfahrung klar, daß, wenn ein schwerer Cörper herunter fället, seine Bewegung um so viel geschwinder wird, je länger er fället. Daraus denn folget, daß die Schwere dem Cörper nach und nach einen neuen Druck geben muß, da die Würckung des ersten noch nicht vergangen, indem kein Widerstand vorhanden. Da nun in den Höhen, in welchen wir es versuchen können, die Schwere der Cörper einerley gefunden wird; so können wir annehmen, daß die Schwere in jedem Augenblicke ei-

nen

nen gleichkräftigen Druck dem Cörper gebe. Es sey also der Augenblick t, die Geschwindigkeit, welche der Cörper in einem erlanget c; so ist nach Verfliessung $2t$, die Geschwindigkeit $2c$, nach Verfliessung $3t$ ist sie $3c$ u. s. w. Nun verhalten sich die Räume, welche die Cörper durchlaufen, wie die Producte aus den Zeiten in die Geschwindigkeiten (§. 2. VIII.). Daher ist der Raum, durch welchen der Cörper im ersten Augenblicke gefallen, tc; zu dem Ende des anderen Augenblickes ist sein Raum, den er durchgelaufen, $4tc$; zu Ende des dritten $9tc$; zu Ende des vierten $16tc$; zu Ende des fünften $25tc$; &c. Demnach verhalten sich die Räume gegen einander wie $1tc : 4tc : 9tc : 16tc : 25tc$ &c. das ist, wie $1 : 4 : 9 : 16 : 25$: &c. oder die Quadrate der Zeiten.

II. Ziehet nun die Höhe, durch welche der Cörper im ersten Augenblicke gefallen, von der Höhe ab, durch welche er in zweyen gefallen; so bleibet für den anderen Augenblick 3 übrig, eben so findet ihr für den dritten 5, für den vierten 7, für den fünften 9 &c. Solchergestalt wird die Bewegung der schweren Cörper nach den ungeraden Zahlen geschwinder gemacht.

III. Da nun $R : r = T^2 : t^2$ so ist $\sqrt{R} : \sqrt{r} = T : t$. Ihr könnet also die Zeiten durch die Wurzeln des Raumes andeuten.

IV.

IV. Wenn ihr demnach in einer Parabel die Abscissen für R annehmet, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$.

V. Wiederum weil $R : r = C^2 : c^2$; so ist $\sqrt{R} : \sqrt{r} = C : c$. Ihr könnet also die Geschwindigkeit durch die Wurtzeln des Raumes ausdrucken.

VI. Dannenhero wenn die Abscissen in einer Parabel R sind, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$ und also $= C$.

Zusatz.

10. Wenn in dem Triangel AEI die Abscissen AB, AC &c. $= T$, die Semiordinaten BF, CG &c. $= C$ angenommen werden; so sind die Triangel $= \frac{1}{2} TC = R$. Wenn ihr nun setzet, das alle Ordinaten BF, CG, DH, EI einander gleich sind: so werden die Triangel Rectangula, deren Inhalt $= TC$. Da nun TC den Raum vorstellet, welchen der Cörper in der Zeit T mit der Geschwindigkeit C durchlaufen würde, die er zu Ende der Zeit hat, wenn er sie gleich anfangs hätte und stets dieselbe unverändert behielte; so ist klar, daß dieser Raum sich zu jenem verhält wie TC zu $\frac{1}{2} TC$, das ist, wie 1 zu $\frac{1}{2}$, oder wie 2 zu 1. Tab. XI. Fig. 91.

Die 3. Aufgabe.

11. Aus der gegebenen Zeit, in welcher ein Cörper durch eine gewisse Höhe gefallen ist, zu finden, wie er in jedem Theile derselben Zeit gefallen.

Auf-

Auflösung.

Es sey der erste Theil der Zeit 1, die Zahl der Theile m, der Raum in dem ersten Theile x, so ist der Raum in dem letzten $2mx - 2x + x$ (§. 9. & 69. *Arithm.*) $= 2mx - x$ und die Summe in allen Theilen der Zeit m^2x (§. 113. *P. I. Algeb.*). Setzet nun den gantzen Raum a, so ist

$$m^2x = a$$

$$x = a : m^2.$$

Es sey z. E. $a = 125$, $m = 5$ Secunden, so ist $x = 125 : 25 = 5$. Also ist der Cörper in der ersten Secunde 5, in der anderen 15, in der dritten 25, in der vierten 35, in der fünften 45' gefallen.

Die 4. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 92.

12, Es wird eine Kugel aus C nach der Linie DC wider die Wand AB geworfen, man soll den Winkel EDG finden, welchen die Linie ED, nach welcher sie zurück prallet, mit AB machet. Wir wollen CDF den Einfallswinkel, EDG aber den Reflectionswinkel nennen.

Auflösung.

Lasset aus C und E die Perpendicularlinien CF und EG fallen. Es sey $CF = a$, $EG = b$, $FG = c$, $DF = x$; so ist $DG = c - x$, $CD^2 = aa + xx$, $DE^2 = bb + cc - 2cx + xx$. Da nun die Natur immer den kürtzesten Weg gehet, so muß die Kugel in D dergestalt zurück prallen, daß sie bis E den kürtzesten Weg nimmt, welchen

chen sie aus C durch das Zurückprallen von der Fläche AB nehmen kan. Und demnach ist CD + DE die kleineste Grösse von ihrer Art. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, deren Gleichung

$$\sqrt{(aa+xx)}+\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=y$$

so ist $xdx:\sqrt{(aa+xx)}+(xdx-cdx:\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=dy=0$ (§. 20. P. II.)

$$x\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}+(x-c)\sqrt{(aa+xx}=0$$

$$x\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=(c-x)\sqrt{(aa+xx)}$$

Das ist FD.ED = DG CD.

Folgends FD : CD = DG : DE und daher der Reflexionswinkel EDG dem Einfallswinkel CDF gleich (§. 52. 182. *Geom.*).

Zusatz.

13. Hieraus sehet ihr zugleich, daß, wenn ein Strahl des Lichtes CD auf einen Spiegel fället, er dergestalt in E reflectiret wird, daß der Reflexionswinkel EDG dem Einfallswinkel CDF gleich ist.

Die 5. Aufgabe.

14. Aus der gegebenen Weite eines strahlenden Punctes A von dem Mittelpuncte B eines sphärischen Spiegels DEF den Punct zu finden, wo der reflectirte Strahl DC mit der Axe vereiniget wird. Tab. XI. Fig. 93.

Auflösung.

Es sey AB = *a*, BD = BE = *r*, BC = *x*, so

ist CE$=r-x$. Weil das Auge, welches den strahlenden Punct A im Spiegel siehet, in der Axe AE stehet, so muß der Punct D, wovon der Strahl, der in das Auge fället, reflectiret wird, der Axe AE überaus nahe seyn. Und dannenhero ist DC$=$CE$=r-x$, die Winkel m, n, p und q sind unendlich klein, und daher ist DB:AB$=m:n$ und DC:CB$=q:p$, folgends auch DB$+$AB:AB$=m+n:n$. Da nun $q=m+n$ (§. 101. *Geom.*) und $p=n$ (§. 13.); so ist DB$+$AB:AB$=q:p$. Derowegen ist (§. 28. *Arithm.*).

$$\begin{aligned}
&DB+AB:AB=DC:BC\\
\text{das ist, }&AE:AB=EC:BC\\
&a+r:a=r-x:x\\
&\hline\\
&ax+rx=ar-ax\\
&\hline\\
&2ax+rx=ar\\
&\hline\\
&x=ar:(r+2a)\\
&r-x=r-ar:(r+2a)=(r^2+ar):(r+2a),
\end{aligned}$$

das ist, EC$=$AE.BE:(BE$+2$AB), oder, wenn ihr AE$=r+a=d$ setzet, $=dr:(2d-r)$.

Der 1. Zusatz.

15. Wenn d grösser ist als r, so ist auch $2d:(2d-r)$ grösser als 1 (§. 78. *Arithm.*) und daher $\frac{1}{2}r.2d:(2d-r)=dr:(2d-r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$, das ist, wenn der strahlende Punct A vor dem Hohlspiegel weiter weg ist als der Semidiameter des Spiegels BE austräget, so ist die

Weite

Weite des Bildes EC grösser als der vierte Theil des Diameters.

Der 2. Zusatz.

16. Wenn d grösser als r, so ist auch $2d - r$ grösser als d, und daher $d : (2d - r)$ weniger als 1 (§. 78. *Arithm.*), folgends $dr : (2d - r)$ weniger als r, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohlspiegel ist geringer als der halbe Diameter.

Der 3. Zusatz.

17. Wenn $d = r$, so ist $dr : (2d - r) = rr : (2r - r) = r$, das ist, wenn der strahlende Punct um den halben Diameter des Spiegels von ihm weg ist, oder in seinem Mittelpuncte stehet, so wird auch sein Bild daselbst gesehen.

Der 4. Zusatz.

18. Wenn $d = \frac{1}{2}r$, so ist $2d = r$ und $rd : (2d - r) = dr : o$, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohlspiegel wird unendlich groß, weil der Renner in Ansehung des Zählers zu nichts wird, das ist, die Strahlen werden mit der Axe parallel, denn in diesem Falle können sie niemahls mit ihr zusammen kommen.

Der 5. Zusatz.

19. Wenn d kleiner ist als r und $2d$ grösser als r (oder d grösser als $\frac{1}{2}r$); so ist $2d : (2d - r)$ grösser als 1. Denn setzet $2d = r + m$, so ist $2d - r = m$, und daher $2d : (2d - r) = 1 + r : m$. Und demnach $\frac{1}{2}r . 2d : (2d - r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild auser dem Hohl-

Spiegel gesehen, wenn die Sache zwischen dem Mittelpuncte und dem Brennpuncte lieget, der (§. 21.) um $\frac{1}{2}r$ vom Spiegel weg ist.

Der 6. Zusatz.

20. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, so hat der Nenner $2d-r$ das Zeichen —. Denn setzet $2d=r-m$, so ist $2d-r=-m$. Und also hat der gantze Bruch $dr:(2d-r)$ das Zeichen —. Derowegen muß der Ort des Bildes hinter dem Hohlspiegel seyn, wenn die Sache zwischen dem Brennpuncte und dem Spiegel lieget.

Der 7. Zusatz.

21. Wenn d unendlich groß wird, das ist, wenn die Strahlen mit der Axe parallel einfallen, so ist r in Ansehung $2d$ für nichts zu halten, und demnach ist $dr:(2d-r)=dr:2d=\frac{1}{2}r$.

Der 8. Zusatz.

22. Wenn der Spiegel erhaben ist, so ist $d=a-r$, und daher bekommet ihr anstatt $(rr+ar):(2a+r)$ die Linie $EC=(ar-rr):(2a-r)=dr:(2d+r)$. Denn weil $2a-2r=2d$, so ist $2a-r=2d+r$. Weil nun hier d allezeit grösser ist als r (denn sonst müste die Sache innerhalb dem Spiegel stehen), und $d:(2d+r)$ weniger als 1; so ist auch $dr:(2d+r)$ weniger als r. Derowegen wird das Bild zwischen dem Mittelpuncte des Spiegels und seiner Fläche gesehen, die Sache mag so weit weg seyn als sie will.

Der

Der 9. Zusatz.

23. Setzet d unendlich groß, so ist r in Ansehung $2d$ unendlich klein, und, dannenhero $dr:(2d+r)=dr:2d=\frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild niemahls weiter hinter einem erhabenen Spiegel gesehen, als den vierten Theil des Diameters, wenn es gleich unendlich weit wegstehet.

Anmerckung.

24. Es ist nicht nöthig zu erinnern, daß wenn d und r durch Zahlen gegeben werden, auch die Weite des Bildes von der Spiegelfläche in Zahlen heraus komme, und ihr auch daher die Verhältniß der Weite zum Diameter des Spiegels finden könnet.

Der 10. Zusatz.

25. Wenn r unendlich groß wird, so ist der Spiegel platt, und alsdenn ist $2d$ in Ansehung r unendlich klein. Derowegen wird in diesem Falle $dr:(2d+r)=dr:r=d$, das ist, in einem platten Spiegel ist das Bild so weit hinter ihm, als die Sache vor ihm.

Der 11. Zusatz.

26. Setzet die Weite des strahlenden Punctes in einem Hohlspiegel werde nd, so ist die Weite des Bildes $ndr:(2nd-r)$. Derowegen wenn die Weiten des strahlenden Punctes von dem Hohlspiegel sich gegeneinander verhalten wie d zu nd, so verhalten sich die Weiten des Bildes von demselben wie $dr:(2d-r)$ zu $ndr:(2nd-r)$, das ist, wie $1:(2d-r)$ zu $n:(2nd-r)$, oder wie $2nd-r$ zu $2nd-nr$.

Wenn nun n eine gantze Zahl und d gröſſer als r iſt; ſo iſt $2nd—rn$ kleiner als $2nd—r$. Derowegen wenn der ſtrahlende Punct auſſer dem Mittelpuncte des Spiegels iſt, ſo gehet das Bild näher zu dem Spiegel, wenn der ſtrahlende Punct weiter davon weggehet. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl iſt, ſo iſt $2nd—rn$ gröſſer als $2nd—r$. Derowegen wenn der ſtrahlende Punct von dem Hohlſpiegel weiter weg iſt als der Mittelpunct deſſelben, ſo gehet das Bild vom Spiegel weg, wenn der ſtrahlende Punct ſich demſelben nähert.

Der 12. Zuſatz.

27. Wenn d kleiner iſt als $\frac{1}{2}r$, und nd gleichfals kleiner als $\frac{1}{2}r$, ſo verhalten ſich die Weiten des Bildes von dem Spiegel wie $r—2nd$ zu $rn—2nd$. Wenn nun n eine gantze Zahl iſt, ſo iſt $rn—2nd$ gröſſer als $r—2nd$, das iſt, wenn der ſtrahlende Punct vom Spiegel weggehet, ſo gehet auch das Bild davon weg. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl iſt, ſo iſt $r—2nd$ gröſſer als $rn—2nd$, das iſt, wenn der ſtrahlende Punct dem Spiegel näher kommet, ſo kommet ihm auch das Bild näher.

Der 13. Zuſatz.

28. Es werde gleichfals bey einem erhabenen Spiegel die Weite des ſtrahlenden Punctes nd, ſo wird die Weite des Bildes von dem Spiegel $ndr:(2nd+r)$, das iſt, wenn die Weiten des ſtrahlenden Punctes ſich verhalten wie

d zu nd; so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem erhabenen Spiegel wie $dr : (2d+r)$ zu $ndr : (2nd+r)$, das ist, wie $1 : (2d+r)$ zu $n : (2nd+r)$ oder wie $2nd+r$ zu $2nd+nr$. Wenn nun n eine gantze Zahl ist, so ist $2nd+nr$ grösser als $2nd+r$. Derowegen wenn der strahlende Punct von dem Spiegel weggehet, so gehet auch das Bild zurück. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd+nr$ kleiner als $2nd+r$. Derowegen wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommt, so kommt ihm auch das Bild näher.

Die 6. Aufgabe.

29. Das Gesetz der Natur zu finden, nach welchem die Strahlen des Lichts gebrochen werden, wenn sie aus einem durchsichtigen Cörper in einen anderen dichteren fahren.

Auflösung.

Es werde der Strahl AB in B gebrochen und fahre in G. Setzet die Geschwindigkeit, mit welcher sich der ungebrochene Strahl AB beweget, verhalte sich zu der Geschwindigkeit des gebrochenen BG wie n zu m. Derowegen ist die Zeit, in welcher die Linie AB durchlaufen wird, zu der Zeit, in welcher das Licht durch die Linie BG kommt wie nBA zu mBG (§. 7.). Lasset nun von A und G die Perpendicularlinien AD und GC fallen, und es sey $AD = a$, $CG = b$, $CD = c$, $CB = x$, so ist $BD = c - x$, folgends $BG = \sqrt{(xx+bb)}$, $AB = \sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}$ und nBA + Tab. XI. Fig. 94.

mGB$=n\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}+m\sqrt{(xx+bb)}$. Weil nun das Licht aus A in G in der geschwindesten Zeit kommen muß, indem die Natur immer den kürtzesten Weg gehet; so ist $n\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}+m\sqrt{(xx+bb)}$ die kürtzeste Zeit, in welcher das Licht durch die Refraction aus A in G gelangen kan. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, in welcher $n\sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}+m\sqrt{(xx+bb)}=y$ so ist (§. 20. *P. II.*)

$$\frac{n(xdx-cdx):\sqrt{(aa+cc-2cx+x^2)}+mxdx:\sqrt{(x^2+b^2)}=dy=o}{mx:\sqrt{(x^2+b^2)}=n(c-x):\sqrt{(aa+cc-2cx+x^2)}}$$

das ist, mCB : BG $=n$DB : AB

$$\frac{}{m\text{CB}.\text{AB}=n\text{BD}.\text{BG}.}$$

Setzet BG $=$ AB, so ist

$$m\text{CB}=n\text{BD}$$

folgends $m:n=$ BD : BC

Wenn ihr nun BG und AB für den Sinum Totum annehmet, so ist BD der Sinus des Winkels BAD oder ABK, hingegen BC der Sinus des Winkels BGC oder GBF (§. 97. *Geom.* & §. 3. *Trigon.*). Und demnach hat der Sinus des Inclinationswinkels ABK zu dem Sinu des gebrochenen Winkels FBG beständig einerley Verhältniß.

Die 7. Aufgabe.

Tab. XI. Fig. 95.

30. Den Punct f zu finden, wo die Strah-

Strahlen des Lichtes nach geschehener Refraction in dem Glase KL mit der Axe AF vereiniget werden.

Auflösung.

Setzet der Strahl AD sey dem Strahle AB unendlich nahe, so ist der Winkel A unendlich klein, und die Linie DI, so mit der Axe einen rechten Winkel in I machet, stehet auch auf AD perpendicular. Eben so machet GH so wohl in G als H einen rechten Winkel. Es sey nun $AD = AB = AI = y$, $Bc = a$, $EC = b$, $BE = f$, $DF = IF = BF = x$, $HF = EF = GF = v$, $Hf = Ef = Gf = z$, $cP = r$; $CM = t$ die Verhältniß der Refraction aus der Luft ins Glas 3 : 2, so ist $Ac = y + a$, $FC = v + b$, $Fc = x - a$. Weil nun $3 : 2 = cP : cQ$ (§. 29.), so ist $cQ = 2r : 3$. Eben so, weil $2 : 3 = CM : CN$ (§. 29.), ist $CN = 3t : 2$. Weil ID mit cP parallel, so ist (§. 184. *Geom.*)

$$Ac : cP = AI : ID$$
$$y + a : r = y : ry : (y + a)$$

Eben so, weil wegen der rechten Winkel bey D und Q die Linien ID und cQ parallel sind, ist (§. 184. *Geom.*):

$$FI : ID = Fc : cQ$$
$$x : ry : (y + a) = x - a : \tfrac{2}{3}r$$
$$\tfrac{2}{3}rx = (rxy - ary) : (y + a)$$

$$2rxy+2arx=3rxy=3ary$$
$$3ary=rxy-2arx$$
$$3ay:(y-2a)=x$$

Wiederum, weil wegen der rechten Winkel bey M und H die Linien CM und GH paralel sind, so ist (§. 184. *Geom.*).

$$FC:CM=FG:GH$$
$$b+v:t=v:tv:(b+v)$$

Und endlich, weil wegen der rechten Winkel bey N und H die Linien CN und GH paralel sind, so ist (§. 184. *Geom.*).

$$fC:CN=fG:GH$$
$$b+z:\tfrac{3}{2}t=z:tv:(b+v)$$
$$\tfrac{3}{2}tz=(btv+tvz):(b+v)$$
$$3btz+3tvz=2btv+2tvz$$
$$3bz=2bv-vz$$
$$3bz:(2b-z)=v=x-f$$
$$f+3bz:(2b-z)=x=3ay:(y-2a)$$
$$2bfy-fzy+2afz-4abf+3bzy-6abz=6a$$
$$by-3azy$$
$$3azy+3bzy+2afz-fzy-6abz=6aby+4ab$$
$$f-(2bfy$$
$$z=$$

$$z = \frac{6aby + 4abf - 2bfy}{3ay + 3by + 2af - fy - 6ab} = Ef$$

Wenn ihr die Dicke des Glases nicht regardiret, und also, $= o$ setzet, so verlieren sich alle Glieder, die durch f multipliciret sind, und ihr bekommet

$Ef = z = 6aby : (3ay + 3by - 6ab) = 2aby : (ay + by - 2ab)$.

Anmerckung.

31. Unerachtet die gefundene Regel hauptsächlich dienet, den Ort des Bildes zu finden, wenn das Glaß auf beyden Seiten erhaben ist und zwar die Radii der erhabenen Flächen nicht von einerley Grösse sind; so könnet ihr doch daraus gar leicht auch Regeln für alle übrige Fälle herleiten, wie aus folgenden Zusätzen erhellet

Der 1. Zusatz.

32. Wenn das Glaß auf beyden Seiten gleich erhaben ist, so ist $cB = CE$ das ist, $a = b$ und daher $z = 2a^2y : (2ay - 2a^2) = ay : (y - a)$.

Der 2. Zusatz.

33. Wenn cB oder a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL, die gegen den strahlenden Punct A gekehret ist, platt, und die Glieder, die durch a nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich klein oder nichts. Daher ist $z = 2aby : (ay - 2ab) = 2by : (y - 2b)$.

Der 3. Zusatz.

34. Hingegen wenn b unendlich groß wird. so ist das Glaß auf der hinteren Seite KEL platt und die Glieder, darinnen b nicht vorhanden,

den, werden in Ansehung der anderen unendlich klein. Solchergestalt ist $z = 2aby : (by - 2ab) = 2ay : (y - 2a)$.

Der 4. Zusatz.

35. Also ist es ein Thun, ob ihr die erhabene oder platte Fläche eines Glases, so auf einer Seite erhaben, auf der anderen platt ist, gegen den strahlenden Punct kehret.

Der 5. Zusatz.

36. Wenn so wohl a als b unendlich groß werden, so wird das Glaß auf beyden Seiten platt, und $ay + by$ werden in Ansehung $2ab$ unendlich klein. Daher ist $z = 2aby : -2ab = -y$. Also kommen die Strahlen nirgends zusammen, als in dem Puncte, wo sie ausfliessen.

Der 6. Zusatz.

37. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen mit der Axe parallel ein, und daher ist $2ab$ in Ansehung der übrigen Glieder unendlich klein, folgends $z = 2aby : (ay + by) = 2ab : (a + b)$ für ein Glaß, welches auf beyden Seiten auf verschiedene Art erhaben ist.

Der 7. Zusatz.

38. Wenn das Glaß beyderseits auf gleiche Art erhaben ist, so ist $z = 2aa : 2a = a$.

Der 8. Zusatz.

39. Wenn a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL gegen den strahlenden Punct zu platt, und b in Ansehung a unendlich klein Derowegen ist $z = 2ab : a = 2b$. Hingegen wenn b unendlich groß wird, so ist die vom

strah-

strahlenden Puncte A weggekehrte Seite KEL platt, und a in Ansehung b unendlich klein. Derowegen ist $z = 2ab : b = 2a$.

Der 9. Zusatz.

40. Wenn ihr für $+b$ in der Regel $-b$ setzet, so wird das Glaß auf der Seite KBL gegen den strahlenden Punct A zu hohl, und $z = -2aby : (ay - by + 2ab)$.

Der 10. Zusatz.

41. Setzet $-a$ für $+a$, so wird das Glaß auf der vom strahlenden Puncte weggekehrten Seite hohl und $z = -2aby : (by + 2ab - ay)$.

Der 11. Zusatz.

42. Wenn ihr für a und b zugleich $-a$ und $-b$ setzet, so wird das Glaß auf beyden Seiten hohl, und $z = 2aby : (-ay - by - 2ab)$.

Der 12. Zusatz.

43. Wenn a unendlich groß wird und ihr $-b$ für b setzet, so ist das Glaß auf der Seite gegen den strahlenden Punct platt, auf der anderen aber hohl, und die Grössen, so durch a nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich klein. Daher ist $z = -2by : (y + 2b)$.

Der 13. Zusatz.

44. Wenn b unendlich groß wird, und ihr $-a$ für a setzet, so ist das Glaß auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu hohl, auf der anderen erhaben, und die Grössen, so durch b nicht multipliciret sind, werden in Ansehung

der

der anderen unendlich klein. Daher ist $z = -2ay : (y + 2a)$.

Der 14. Zusatz.

45. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen parallel ein und daher wird (§. 40.) $z = -2aby : (ay - by) = -2ab : (a - b)$, (§. 41.) $z = -2aby : (-ay + by) = -2ab : (b - a) = (\text{wenn } a = b) - 2a^2$, (§. 42.) $z = 2aby : (-ay - by) = 2ab : (-a - b) = (\text{wenn } a = b) = a$, (§. 43.) $z = -2by : y = -2b$, (§. 44.) $z = -2ay : y = -2a$.

Der 15. Zusatz.

46. Weil in den Hohlgläsern die Weite des Punctes, wo die gebrochene Strahlen mit ger Axe vereiniget werden, das Zeichen — hat, so ist klar, daß derselbe auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu gesucht werden muß, und dannenhero die Strahlen in dergleichen Gläsern von der Axe weggebrochen werden. Ob aber solches viel oder wenig geschehe, kan aus den gefundenen Regeln geurtheilet werden.

Anmerckung.

47. Aus diesen Exempeln könnet ihr sehen, wie die Algebra mit grossem Vortheile in anderen Wissenschaften angebracht wird, auch werde ich bey anderer Gelegenheit noch ein mehreres zeigen.

ENDE der Algebra.

Regi-

Register

über

alle vier Theile

der

Anfangs-Gründe

aller

Mathematischen

Wissenschaften.

Register
über alle vier Theile.

NB. Die römische Zahl bedeutet den Theil, die dabey gesetzte Ziffer aber die Seiten. Wenn im Anfange keine römische Zahl stehet, so ist der erste Theil zu verstehen; sonst aber derjenige, welcher vorher stehet.

Ab, III. 1489. 1491
Aban mah, III. 1487
Abdachung, II. 609
Abend, Erklärung, III. 1133. wie er zu finden, 1138
Abend-Dämmerung, III. 1211. Ursachen, 1212. wie lange sie währet, 1213. wie das Ende auszurechnen, 1213. 1214
Abend-Stern, III. 1267
Abend-Uhren, Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1538
Abgekürzte Pyramide, wie sie perspectivisch zu zeichnen, III. 1069
Abgekürzter Kegel, wie (*Wolfs Mathes. Tom. IV.*) sein Inhalt zu finden, 230
Abgesonderte Theile, III. 1088
Ablauf, Erklärung, 343. Zeichnung, 347. 530. Gebrauch, 350. 348
Abscisse, IV. 1678
Abschnitt des Circuls, wie er auszurechnen, 297
Abweichende Uhr, Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1537. & seqq.
Acht-Eck, wie seine Seite zu finden, IV. 1649
Achtel-Carthaune, II. 533
Adar, III. 1489. 1491
Adar mah, III. 1487
Addiren, Erklärung, 41.

Regeln für gantze Zahlen, 42. 49. für abgebrochene 79. für Buchstaben, IV. 1556. 1557. für Irrational-Zahlen, 1569. Probe, I. 51. 52. Zeichen, 53. IV. 1553
Adler, III. 1190
Adspecte, Erklärung, III. 1394 Zeichen und Bedeutung, 1594. 1395
Aehnlichkeit, 118. der Circul, 120. Figuren, 130. 194
Æquatio centri, Erklärung, III. 1315. wie sie zu finden, 1323
Æquation der Uhr, III. 1470
Æquatio optica, III. 1315
- - - *physica*, ibid.
Æquator, III. 1129. 1434
Equinoctial-Uhr, Erklärung, III. 1527. wie sie zu zeichnen, 1528. seq.
Æquinoctium, wie es zu observiren, III. 1304
Aequatoris-Grade, wie sie in Zeit zu verwandeln, III. 1163
Aera, III. 1493
Aerometrie, II. 877
Aesterich, wie es zu schlagen, 463
Aggregat, 41
Aiyar, III 1489
Alcor, III. 1191
Algebra, IV. 1549
Algebraische Aufgaben in Zahlen, IV. 1571. im menschlichen Leben, 1581. in der gemeinen Geometrie, 1647. in der höheren, 1677
Algebraische Gleichung, Nutzen in Erklärung der krummen Linien, IV. 1677
Algebraische Linie, Erklärung, IV. 1678. Geschlechte, 1679. allgemeine Gleichung, 1681
Subtangens, 1813
Altar, III 1190
Alternatio rationum, IV. 1634
Altitudo nonagesimi, III. 1220
Americanische Gans, III. 1190
Amplitudo occidua, Erklärung, III. 1169. wie sie zu finden, 1170. Nutzen, 1171
Amplitudo ortiva, Erklärung, III. 1170. wie sie zu finden, 1170. 1171. Nutzen. 1171
Amphora, III 1143
Andreas, III 1191
Andromeda, III. 1190
Ancker in Mauren, 435
Angle de l'epaule, II. 618
- - *diminué*, ibid.
- - *du centre*, ibid.
Angulus acutus, 123
- - *ad Solem*, III. 1315
- - *obtusus*, 123

Angulus orientis, III. 1220
- - *rectus*, 123
- - *refractionis*, III. 953
Anlage der Böschung, II. 609
Anlauf. Erklärung, 343
Zeichnung, 347
Anliegende Theile, III. 1088
Anmerckungen, 30
Anomalia coæquata, III. 1314
- - *orbis*, III. 1345
Antarctische Polar=Circul, III. 1145
Antares, III. 1191
Antichthones, III. 1433.
Antipodes, III. 1433
Antinous, III. 1190
Aphelium, III. 1312. wie es zu finden, 1317. seine Bewegung, 1317
Apogæum, III. 1312. wie es zu finden, 1332
Apollonische Parabel, IV. 1683
Approchen. Erklärung, II. 726. Beschaffenheit, 737 wie sie zu führen, 729. zu hindern. 731
April, III. 1484
Absidum linea, III. 1312 1314
Arabisches Jahr, III. 1490
Aræostylon, 395
Arcade, 393
Architrab. Erklärung, 342
wesentliche Glieder, 351
Höhe, 359. Auslauf fung, 361
Arcitenens, III. 1143
Arctische Polar=Circul, III. 1145
Arcturus, III. 1190
Arcus inter centra, III. 1399 1403
Arcus visionis, III. 1208
Ardabahesht mah, III. 1487
Argo navis, III. 1190
Argument der Inclination, II. 1338
Aries, II. 1143
Arithmetica infinitorum, IV. 1644
Arithmetische Progression, IV. 1612
= = Proportional=Zahlen, wie sie zu finden, 98
= = Verhältniß, 72
Artillerie. Erklärung, II. 517. Nutzen, 515. 516. wie sie abzuhandeln, 515
Art zu zählen, 46
Ascensional=Differentz. Erklärung, III. 1161. wie sie zu observiren, 1161
Ascensio obliqua, III. 1161
- - *recta*, III. 1159
Asini. III. 1191
Astrolabium, 123
Astronomie. Erklärung, III. 1125. Nutzen, 1124
Astronomisches Fernglaß, III. 1037
Astronomische Stunden III. 1471

Asymptoten, Erklärung, IV. 1704. wie sie zu finden, 1837
Athyr, III. 1485
Attaquen, II. 721
Attisches Jahr, III. 1489
Aufgabe, 28. wie sie algebraisch aufzulösen, IV. 1571. 1573
Aufgang der Sonne, wie er zufinden, III. 1169
" " der Sterne. III. 1132 1200
Auge, woraus es bestehet, III. 953. sqq. Veränderungen, die bey dem Sehen darinnen vorgehen, 955. Beschaffenheit, wenn es in die Ferne nnd in die Nähe sichet 958
Aufgemachte Thüre, wie sie ins Perspectiv zu bringen, III. 1073
Augen-Gläser, III. 1033
Augen-Punct, III. 1066
Augustmonat, III. 1494
Augustus, III. 1484
Aufhebung eines Bruches, 78
Aufriß, Erklärung, 509 wie er zu machen, 509
Ausladung, 340
Aussage, 22
Ausschnitt des Circuls, 187
Ausdehnen, II. 879
Aussenwercke, wozu sie dienen, II. 631. ihre Arten, 632. ihre Beschaffenheit, 636. Profil, 680
Aeussere Polygon, II. 616
Ausziehung der Wurtzeln, Erklärung, 83. Regeln, 86. 91. Probe, 88. 94
Axe der Laffeten, wie sie zu zeichnen, II. 550
Axiomata, 17
Axis mundi, III. 1129
Axis in peritrochio, Erklärung, II. 749. Eigenschaften, 778
Azimuth, Erklärung, III. 1169. wie es zu finden, 1170. 1171
Azimuthal-Quadrant, III. 1169

B.

Babylonische Stunden III. 1472
Backsteine, 324
Bär, der kleine und grosse, III. 1190
Bäurisch Werck, 456
Bahn der Planeten, III. 1286. was sie vor eine Linie ist, 1311
Balcon, 449
Band, 344
Banquet, II. 608
Barometrum, II. 892
Baroscopium, II. 892
Bastart-Fenster, 437
Bastey, II. 613

Bastion, II. 613
Bathseba, III. 1191
Batterie, Erklärung, II. 733. Zeichnung, ibid.
Bau-Art der Alten, 337
Bauholtz, wie es beschaffer seyn soll. 318. wie es zu fällen, 319. 320. zu trocknen, 320. im Bauen zu setzen, 321
Baukunst, 305
Baumeister, 305
Bau Unkosten, wie sie im Festungsbaue zurechnen, II. 713
Bauzeug, 315
Bedeckung der Ferngläser, Erklärung, III. 1048. Nutzen, 1049. wie sie zu finden, 1049
Bedingung, 22. 23
Beheman mah, III. 1487
Begriff, 6. 8
Benennung, IV. 1571
Bequemlichkeit des Gebäudes, 306
Berge im Monde III. 1255 1256. ihr Schatten, 1257. ihre Grösse, 1383
= = in der *Venere*, III. 1267
Berme, Erklärung, II. 627
Beständige Defens-Linie, Erklärung, II. 616. Grösse, 619. 620
Bewegliche Feste, III. 1509
Bewegung, Regeln insgemein, IV. 1915. insbesondere für die schweren Cörper, 1917. 1919. wie sie gesehen wird, III. 956. 981. 982. 984
Bewegung des Mondes, III. 1139. 1353
= = der Planeten, III. 1284
= = der Sterne, wie vielerley sie ist, III. 1140
Bewegungskunst, II. 745
Beweiß, 24. 27
Bey einander, wenn die Bilder zweyer Sachen gesehen werden, III. 979. 980
Bild im Auge, wie es beschaffen. III. 955
Binomische Wurtzel, IV. 1586
Biquadratische Gleichung, wie sie geometrisch zu construiren, IV. 1769. 1770
Blätter, wozu sie in der Baukunst gebraucht werden, 354
Blondells Fortification. Maximen, II. 663. Ausrechnung der Linien und Winkel, 665. Zeichnung, 670. Profil, 672
Bodenstücke, II. 542. 543.
Bock in der Artillerie, II. 551

Böschung, II. 609
Bogen, wie er auszurechnen, 296. wie daraus der Sinus zu finden, IV. 1875. 1877. wie der Tangens zu finden, 187[illegible]
Bogen in Arcaden Wie er beschaffen, 393, 400
Bogen-Schuß, III. 563
Bogenstellung Erklärung, 383. Zeichnung, 408. Einrichtung, 412
Bogen zwischen den Mittelpuncten, III. 1399 1403
Böller, II. 564
Bollwercke. Erklärung, II. 613. Figur, 614. 615
Bollwercks-Winckel. Erklärung, II. 618. Grösse, 620
Bolzen, II. 550
Bombe, II. 569. 570. 571
Bootes, III. 1190
Boussole, 215. 219
Borten, 342
Brachmonat, III. 1484
Brandröhre in der Bombe, II. 569. Carcasse, II. 575
Brandmauer, 435
Breite des Flusses, wie sie zu messen, 146
= = des Monds, wie sie zu finden, III. 1369
= = der Planeten, wie sie observiret wird, III. 1283 1286. wie sie zu finden 1346. 1347
Breite des Sternes. Erklärung, III. 1183. wie sie zu finden, 1184. ob sie veränderlich, 1195
= = eines Ortes. Erklärung, III. 1440. wie sie zu finden, 1440
Brennglaß, III. 1019. 1020
Brennpunct. Erklärung, IV 1685. wie er zu finden in der Parabel, 1685 in der Ellipsi, 1685. in der Hyperbel. 1699. 1700. in den Brenngläsern, III. 1019. 1020. 1021
Brennspiegel, III. 1006. 1007. 1008. 1021
Brill. Zeichnung, II. 672. 680. 681. Profil, 681
Bruch. Erklärung, 76. wie er geschrieben wird, 77. sein Werth, 77. Veränderungen, 78. Rechnung, 79. Logarithmus, 269. 270. wie unendliche zu summiren, IV. 1642. wie sie aus Gleichungen weg zu schaffen, IV. 1738
Brustfelgen, II. 785
Brustlehne, 453
Brustwehr, II. 608. 609
Büchsenmeisterey-Kunst, II. 517.

Buch-

Buchstaben Rechenkunst, IV. 1550

C.

Calendæ, III. 1485
Calender, wie er zu machen, III. 1513. 1514
Caliber, II. 535
Caliber-Stab. Erklärung, II. 535. Zubereitung, 538
Camera obscura, III. 959
Camin, wie er zu bauen, 481
Cancer, III. 1134
Canonen-Schwefel, II. 520
Canun, III. 1489
Capella cum hædis, III. 1191
Caper, III. 1143
Capital, Erklärung, 341
wesentliche Glieder, 351
Höhe, 360. Auslaufung, 351
Capital-Linie, II. 617
Caponieres, II. 639
Carcassen, II. 575
Cardinal Gegenden, III. 1454
Carthaune, II. 532. 533. 553
Casleu, III. 1491
Cassiopeja, II. 1190
Castelle, II. 699
Castor, III. 1191
Catalogi fixarum, III. 1188 1189
Catoptrik, III. 989
Centaurus, III. 1190
Centri-Winkel, II. 618
Centrum, 121
- - gravitatis, II. 754
- - magnitudinis, ibid.
Cepheus, III. 1190
Chaldäischer Scrupel, III. 1478
Chamæleon, III. 1190
Characteres Chronologici, III. 1493
Chemin Couvert, II. 637
Chojac, III. 1485
Chorda, 121
Chordad mah, III. 1487
Christ-Monat, III. 1484
Chronologie. III. 1469
Circul. Erklärung, 121
Eigenschaft, 122. 182 184. IV. 1622 1830. 1831. Eintheilung, 121
Ausrechnung, 182. 184
Beschreibung, 164
Quadratur, IV. 1853
Rectification, 1870
Subtrangens, 1801, wie er ins Perspectiv zu bringen, III. 1068
Circul der Länge und Breite, III. 1183
Circul von höheren Geschlechten, IV. 1698. 1811
Circul Bogen, 129. 161

Circuli diurni, III. 1133
Circumvallations-Linien, II. 723
Ciſſois. Erklärung, IV. 1714
Eigenſchaft und Gleichung, 1715
Cidatellen. Erklärung, II. 699 Beſchaffenheit, 700 Zeichnung, 701
Citationes, 25. ſeq.
Climata, III. 1450. 1452
Coäquirte Anomalie. Erklärung, III. 1314. wie ſie zu finden, III. 1322. 1324
Cörper. Wie er perſpectiviſch zu zeichnen, III. 1069
Cörper von leichterer Art, II. 843
= = von ſchwererer Art, II. 844
Cörperlicher Inhalt, wie er zu finden, 225
= = Ort, IV. 1756
Colonnata. Erklärung, 393. Beſchaffenheit, 396. 398
Cometen, was man von ihnen obſerviret, III. 1389. ihre Natur, 1392, ihr Ort, 1391. und Schweif, 1392
Commutations-Winkel, III. 1344.
Compoſitio rationum, IV. 1633
Conchilis, IV. 1713
Conchois. Erklärung, IV. 1713. Gleichung, 1713. 1714. Aſymptote, 1713. Subtangens, 1823. Wendungs-Punct, 1907
Conus. Erklärung, 127. Eigenſchaften, 127. II. 846. IV. 1675. 1838. Ausrechnung, IV. 1862. 1878
Coniſcher Spiegel. Erklärung, III. 990. wie ſie zu machen, 997. Eigenſchaften, 1000. 1001
Conjunction, III. 1394
Contra-Minen, II. 640
Contravallations-Linien, II. 723. 725
Contregarde. Erklärung, II. 633. Zeichnung, 662 Nutzen, 633
Contreſcarpe. Erklärung, II. 636. wie ſie zu erobern, 735. 737
Converſio rationum, IV. 1634
Corinthiſche Ordnung. Erklärung, 358. Glieder, 377
Cornea III. 954
Corollaria, 28. 29
Cortine, II. 615
Coſinus, 262
Crater, III. 1190
Crepuſculum matutinum, III. 1211
= = *veſpertinum*, III. 1211

Creutzgewölbe, 471. 472
Cubatur, IV. 1878
Cubic-Maaß. 226
Cubic-Ruthe, Schuh, Zoll, Linie, 227
Cubic-Wurzel. Erklärung, 83. 84. wie sie auszuziehen, 91. IV. 1593
ihr Logarithmus, 271
Cubic-Zahlen. Ihre Differentien, IV. 1606. 1607
ihr Logarithmus, 271
Cubiren, IV. 1878.
Cubische Gleichung, wie daraus die Wurzel zu ziehen, IV. 1735. wie sie geometrisch zu construiren, 1769
Cubus. Erklärung, 127. Eigenschaften, 127. wie sein Inhalt auszurechnen, 225
Curtirte Weite. Erklärung, III. 1339. wie sie zu finden, 1342
Curtirung, III. 1339
Crystalline Feuchtigkeit, III. 955
Cyclois. Erklärung, IV. 1717. Eigenschaften, 1717. Subtangens, 1825
Cyclus indictionum, III. 1503
- - *Lunæ*, III. 1498
- - *Solis*, III. 1495
Cylinder. Erklärung, 126
Eigenschaft, 126. 227.
II. 845. IV. 1682. Ausrechnung, 231. 244. 245.
Netze, 255
Cylindrische Spiegel. Erklärung, III. 990. wie sie zu machen, 997. Eigenschaften, 999

D

Dach. Erklärung, 418
Höhe, 498. Arten, 499. 471. Materie. 500
Dach *à la mansarde*, 499
Dampf-Kugel. Erklärung, II 5,7. wie sie zu machen, 580
Dauerhaftigkeit des Bauzeuges, wie sie zu beurtheilen, 316
- - des Gebäudes, wie sie zu beurtheilen, 308
David, III. 1191
December, 1484
Declination eines Sternes. Erklärung, III. 1152. wie sie zu finden, 1152. ihr Nutzen, 1153. seq.
- - der Ecliptick, III. 1154. 1156
Declinirende Uhren, III. 1527
Decke, 467. 468
Deckel, 341
Defendirende Linie, II. 602

Defension, wie sie einzurichten, II. 601
Defens Linie, II. 602
Desinitio, 5
- - *nominalis & realis*, 6
les Dehors, II. 631
Delphin, III. 1190
Delphine in der Artillerie, II. 542
Demonstrationes, 27
Demigorge. II. 617
Demilune, II. 633
Descensional = Differentz, II. 1161
Deutlich, wenn Sachen gesehen werden, III. 957
Deutlicher Begriff, 7
Diabetes, II. 931
Diagonal, 173
Diameter. Erklärung, 121 Verhältniß zur Peripherie des Circuls, 183. 184. 297
Diameter der Planeten, wie er zu finden, III. 1377. 1378
= = einer krummen Linie, IV. 1677
= = der Erde, wie er zu messen, III. 1435. 1436
Diastylon, 395
Dickſäulig, 395
Differentiæ ascensionalis, III. 1163
Differential = Grösse, IV. 1801. wie sie zu differentiiren, 1802
Differential = Rechnung, IV. 1799
Differentiiren. Erklärung, IV. 1802. Regeln für die veränderlichen Grössen, 1802 für die Exponential = Grössen, 1894. für die Differential = Grössen, 1900
Differentio = differentiiren, IV. 1900
Differentz, 42
Dignität. Erklärung, IV. 1562. Eigenschaften, 1698. 1611. allgemeine Regel für dieselben, 1602
Di mah, III. 1487
Dioptrik, III. 1014
Directions = Linie, II. 752
= = = der schweren Cörper, II. 759. 760
Directus, III. 1285
Distantz = Punct, III. 1066
Diuidendus, 44
Dividiren Erklärung, 43. 44. Regeln für gantze Zahlen, 64. 65. für gebrochene, 82. für Buchstaben, IV. 1561. für Irrational = Zahlen, 1571. wie es ohne das Einmahl Eins geschiehet, I. 68. Zeichen, 72. IV. 1555
Divisio rationum, IV. 1634
Divisor, 44
Dodecaëdrum. Erklärung, 252. Netze, 253. 254

Doppelt, wenn etwas geschehen wird, III. 987
Doppelte Eckenzierde, 448
= = Hohlkehle, 347
Dorado, III. 1190
Dorische Ordnung. Erklärung, 357. Glieder, 367
Drache, III. 1190
Drachen-Kopf, III. 1353
Drachen-Monat, III. 1353
Drachen Schwantz, III. ibid.
Dreyecke. Erklärung, 123 Eigenschaften, 129. wie seine Höhe zu finden, IV. 1658. 1659
Dreyvierthel-Carthaune, II. 533. 553. 562
Droßirung, II. 609
Druck der flüßigen Cörper, II. 849
Druckwerck, II. 920
Dulbeggia, III. 1491
Dulkaadah, III. 1491
Dunckel, warum ein Cörper aussiehet, III. 976
Dunckeler Begriff, 7
Durchmesser, 121
Durchschnitt des Gebäudes, 510
= = einer Festung, II. 656

E.

Ebener Ort, IV. 1756
Eccentricität. Erklärung, III. 1312. wie sie zu finden, 1315. 1352. ihre Grösse, 1347
Eccentrische Anomalie, III. 1314
Eccentrischer Circul, III. 1314,
= = Ort des Planetens III. 1343
Eckenzierde, wie sie zu zeichnen, 447. 448
Ecliptick. Erklärung, II. 1142. 1433. Eintheilung, 1142. grosse Declination, 1154
Egyptisches Jahr, III. 1485
Eigene Bewegung, III. 1141
Einfache Eckenzierde, 447
Einfacher Ort, IV. 1756
Einfallendes Licht, 438
Einfalls-Winckel, III. 951
Einmahl Eins, 57. 58. 60. III. 1192
Eintheilung des Gebäudes, wie sie zu finden 477
Einziehung, 432
Einziehung der Mauren, 432
Elastische Kraft der Luft, II. 882. 885
Element einer Fläche, IV. 1843
Elephant, III. 1192
Ellipsis. Erklärung, IV. 1689. 1690. Eigenschaften, 1690. 1830. 1831. 1834

1834. 1856. 1857. 1858,
Gleichung, 1690. Beschreibung, 1695. Quadratur, 1856. 1857.
Subtangens, 1812. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 1711. ist die Bahn der Planeten, *III.* 1310
Elipses, von höheren Geschlechten, *IV.* 1697 1698. 1812
Elliptische After-Kugel, *IV.* 1881
Elongations-Winkel, *III.* 1344
Elul, *III.* 1489. 1491
Entgegensetzung, *III.* 1394
Entfernung vom Ruhe-Puncte, *II.* 753
Erde, ihre Figur, 1431. 1433. Grösse, 1435. 1436. Bewegung, 1296 Ist ein Punct in Ansehung der Weltkugel, 1147 wie groß sie im Monde gesehen wird, 1385. wie sie daselbst aussiehet, 1386. ihr ab- und zunehmendes Licht, 1385. 1386. wie starck sie den Mond erleuchtet, 1379
Erdfinsterniß, *III.* 1257
Erdkugel, wie sie zu verfertigen, *III.* 1457. ihr Gebrauch, 1459
Erdreich, wie seine Beschaffenheit zu erforschen, 421. wie das lockere zu befestigen, 422
Erfahrungen, was sie sind, 18. ihre Beschaffenheit, 18. 19. wenn man sie anführen muß, 20. 21
Erhabener Spiegel. Erklärung, *III.* 989. wie er zu machen, 996. Eigenschaften, *IV.* 1932
Erhabenes Glaß. Erklärung, *III.* 1016. Eigenschaft, 1018. 1021. 1025. 1029
Eridanus, *III.* 1190
Erkäntniß der Natur, wie sie beschaffen, *II.* 1295
Erklärung, 5. 6. wie sie bey den Mathematicis beschaffen, 8
= = der Wörter, 6. 8. 9. 10. 11. 12.
= = der Sachen, 6. 12. 13
Erleuchtung der Kugel, *III.* 963
Epacta. Erklärung, *III.* 1500. wie sie zu finden, 1502. 1503
Epocha, *III.* 1493
Epiphi, *III.* 1485
Equuleus, *III.* 1190
Esphandarmod mah, *III.* 1488
Esplanade, *III.* 637

Europäische Stunden, *III.* 1472
Eurythmie, Erklärung, 313. Grund, 313. 314. Gebrauch, 314
Evstylon, 395
Evolute, *IV.* 1909
Exponens rationis, 73
Exponential-Grössen, Erklärung, *IV.* 1894. wie sie zu differentiren, 1894. wie sie zu integriren, 1898
Exponential-Linien, *IV.* 1895
Exponential-Rechnung, *IV.* 1894

F.

Faces, Erklärung, *II.* 615. Grösse, 625
Fackeln der Sonne, *III.* 1237
Factores, 43
Factum, 43
Fässer, wie sie zu visiren, 248
Falckaune, *II.* 533. 553
Falsche Wage, wie sie zu erkennen, *II.* 766. zu gebrauchen, 766. zu bessern. 768. 769
Familie der algebraischen Linien, *IV.* 1680
Farben, wie sie entstehen, = des Monds in Finsternissen, *III.* 1250. 1251
Farbigte Haut, *III.* 954
Faschinen, *II.* 738
Februarius, *III.* 1484
Feder, wie dadurch Maschinen zu bewegen, *II.* 832. 833
Felder-Decke von Holtze, 467
= = von Gypse, 469
Feldmessen, 220. 222
Feldschantzen, Erklärung, *II.* 701. Grundrisse, 702. 703. 704. 705. 706. Profil 701
Fenster. Erklärung, 435. Beschaffenheit, 435. 436. Höhe und Breite, 436. 438. 440. 441. wie sie übereinander zu setzen, 441. zu bauen, 442. 453. zu zieren, 442. ins Perspectiv zu bringen, *III.* 1072. wie viel in ein jedes Gemach gehören, *I.* 475. 476
Fenster-Creutze, 436
Fernglaß. Erklärung, *III.* 1031. Erfinder, 1032 Röhren dazu, 1033. 1034. Gestelle, 1042. wie viel es vergrössert, 1046. warum die grossen mehr vergrössern, 1047. seq.
Fernglaß in der Astronomie, *III.* 1037. 1045. auf der Erden, *III.* 1042. 1043. 1044

Fervardin mah, III. 1487
Feste, III. 1509
Fester Cörper. Erklärung, II. 843. wie viel er sich eintauchet, 866
Festigkeit des Gebäudes. Erklärung, 306. wie sie zu beurtheilen, 308. wie sie zu beobachten, 334. 336
Festung, wie ihre Vollkommenheit zu beurtheilen, II. 597. wie sie abzustecken, 714
Feuer-Ballen, II. 577
Feuer-Kugeln. Erklärung, II. 576. Arten, 577. wie sie zu binden, 578. und zu taufen, 579
Feuerkugel-Zeug, II. 576
Feuer, wie dadurch Machinen zu bewegen, II. 833. 834
Feuer-Maure. Erklärung. 502. wie sie nicht rauchet, 503
Feuerwercker-Kunst, II. 517
Figuren. Eigenschaften, 130. Aehnlichkeit, 194. seq. Grundlegung, 210. Ausrechnung, 173 = 187
Figuren des springenden Wassers, II. 926
Fische. III. 1142. 1190
Fisch, der fliegende, III. 1190
= = der Südische, III. 1190
Fixstern. Erklärung, III. 1143. Bewegung, 1195. Natur, 1387. parallaxis, 1302. 1303
Fläche der Cörper, wie sie zu finden, IV. 1861 1862. wie sie perspectivisch zu zeichnen, III. 1066. wie ihre Abweichung von Süden, Norden und dem Horizonte zu finden, 1525
Flanc, II. 615
Flanque. Erklärung, II. 615. ihre Lage, 621 Figur, 621. 622. 623. Zahl, 622. 623
Flecken in der Sonne, III. 1233. 1234. 1235. wie sie zu observiren, 1238
Flecken in der *Venere*, III. 1268
= = im Jupiter, III. 1268
= = in den Jupiters Monden, III. 1272
Fliege, III. 1190
Fliegender Fisch. III. 1190
Flüßige Materie. Erklärung, II. 843. ihr wagerechter Stand, 846 847. ihr Druck, 849. 850
Flug, II. 564
Fluß Eridanus, III. 1190
Focus, IV. 1655
Fomahant, III. 1191.
Fons Heronis, II. 939

Fortification. Erklärung, II. 597. Grundregeln. II. 598
Frieß. Erklärung, 342
Beschaffenheit, 361
Höhe, 361
Fronton. Erklärung, 410
Beschaffenheit, 410
Höhe, 411. Zeichnung, 412. 113
Frühling, III. 1444
Fünf-Eck, Erklärung, 125. wie seine Seite zu finden, IV. 1653. wie es geometrisch zu beschreiben, 1654
Fuhrmann. III. 1190
Fundamental Linie, III. 1066
Futter-Mauren bey Festungen, II. 718
Fuß der Säule, 341. des Säulen-Stuhles, 341
Fuß-Gesimse. Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 352. Höhe, 358. Auslaufung, 360. 361
Fuß-Mörser, II. 565
Fuß-Riegel, II. 550

G.

Gallerie, II. 738. 739
Gallileänisches Fern-Glaß, III. 1033
Gebäude. Erklärung, 306
wie davon gründlich zu urtheilen, 306. Unterschied, 306. wie seine Eintheilung zu finden, 459. 476. 478
Gebrochener Winckel III. 953
Gebälcke, 339
Gedritt-Schein, III. 1394
Gefälle des Wassers, II. 809
Gefässe, III. 1190
Gekuppelte Säulen, 391. 392
Geländer-Fenster, 449
Gallileäisches Jahr, III. 1488
Gemach, 458
Gemach-Thüre, 450
Gemäßigte Striche Landes, III. 1443
Gemeine Bewegung, III. 1142
Gemeines Jahr, III. 1482
Gemini, III 1143.
Gemma, III. 1190
Geographie, III. 1431
Geometrie. Erklärung, 117. ihr Nutzen, 116
Geometrische Cörper, wie sie zu machen, 225
= = Linien, IV. 1677
= = Oerter, IV. 1755
= = Progreßion. Erklärung, 74. Eigenschaften, IV. 1613. wie sie

zu summiren, 1613. 1614
Geometrische Proportional-Zahlen, wie sie zu finden, 96. 97. 98. 99
= = Verhältniß. Erklärung, 72. Eigenschaften, 75. IV. 1636
Gerade Ascension. Erklärung, III. 1159. wie sie zu observiren, 1159. 1180. 1197. auf der Himmelskugel zu finden, 1160. wie ihr Unterschied zu finden, 1179
Geradeläufig, III. 1285
Geradelinichte Figur, wie sie in Grund zu legen, 210. auszurechnen, 179. 180. zu theilen, 192
Geradlinichter *Transporteur*, wie er zu verfertigen, 298. 299. und zu gebrauchen, 299. 300
Gerade Linie. Erklärung, 119. wie sie beschrieben und gemessen. wird. 120. 134 135. ihre Eigenschaften, 129. 131. und Theilung, 160 168. 199
Gerade Zahlen, ihre Eigenschaften, IV. 1608. 1609. 1610
Gesechst-Schein, III. 1394
Gesellschafts-Rechnung, 104. 105
Geschlechte der algebraischen Linien, IV. 1679
Geschliffene Gläser, ihre Eigenschaften, III. 1017 & sqq. IV. 1929
Geschütz-Kunst, II. 517
Geschwindigkeit, IV. 1914
Gesichts-Linien, II. 614
Gesimse, 354
Gesimse, zu Fenstern und Thüren, 443
Gestelle, zu Ferngläsern, III. 1042
Gestirne, 1190. 1191. 1192
Gesundes Auge, wie es beschaffen, III. 958
Getrieb, II. 751
Gevirt-Schein, III. 1394
Gewichte, wie damit Maschinen zu bewegen, II. 830. 831. und Kräfte zu verstärken, 832. Unterschied in den berühmten Städten, 541
Gewölbe. Erklärung, 471. wie es aufzurichten, 473. Wiederlage, 473. 474
Giebelfeld, 411
Giebelzinne, 513
Gieß-Faß, II. 928. 929
Ginbat, III. 1486
Glacis, II. 637
Gläserne Feuchtigkeit, II. 954

Glas, wie man es schleifet, III. 1062. 1064.
welches zum Schleiffen gut ist, 1058. 1060
Glaß mit Wasser machet helle, III 1056
Gleichheit der Winkel 129
Gleichschenklicht erTriangel. Erklärung, 124. Eigenschaften, 155.156. Beschreibung, 139. seq.
Gleichseitige Hyperbel. Erklärung, IV. 1709. Nutzen, 1893
Gleichseitiger Triangel. Erklärung, 123. Beschreibung, 140. Eigenschaft, 156
Gleichung, IV. 1571
Glieder in der Baukunst. Erklärung, 343. Regeln ihrer Zusammenfügung, 347. Proportion, 358
Glüende Kugel, wie sie in ein Stück zu laden, II. 558 ihr Gebrauch, 558
Gnomonik, III. 1523
Grab Christi, III. 1191
Graben, seine Nothwendigkeit, II. 607. Beschaffenheit, 529. 530. Breite, 628. wie sie zu finden, 710
Grad, 122
Gränzen, III. 1367
Granaten, II. 575
Gregorianischer Calender, III. 1515
Gregorianisches Jahr, III. 1483
Gregorianische Monate, III. 1484
Grösse. Erklärung, IV. 1550. 1551. Veränderungen, 1552. Zeichen, 1553. wie sie gesehen wird, III. 956. 977. 978
Grösse der Bewegung, IV. 1914
Grösstes, IV. 1828. 1829
Grösste Circul einer Kugel. Erklärung, III. 1083. Eigenschaften, 1084. 1085. 1086. 1097. 1098 1107. 1119
Grösste *Conjunction*, III. 1395
Grosse *Conjunction*, III. 1395
Grosser *Radius*, II. 617
Gründe der Rechenkunst, so willkührlich, 46. 77
Grund des Gebäudes. Erklärung, 418. Stärke, 418. Bau, 418
Grundbau des Gebäudes, 419
= = des Walles, II. 715 716. im Wasser, 429. 430
Grundgraben, 425
Grundlegung der Figuren, 210

Grundlinie der Perspectiv, III. 1066
Grundmauer, 424. 425. 426. 427
Grundregeln der Fortification, II. 598
Grundriß eines Gebäudes. Erklärung, 507. 508. wie er zu machen, 508
= = einer Festung, II. 651
Grundsätze, 16
Güldene Zahl. Erklärung, III. 1499. wie sie zu finden, 1500. 1502
Gypsdecke, 469

H.

Haar der *Berenices*, III. 1190
Haase, III. 1190
Halb-*Caponieres*, II. 639
Halbe Carthaune, II. 533. 553. 562
Halbe Feldschlange, II. 533. 553. 562
Halbe Redoute, II. 706
Halber Mond. Erklärung, II. 633. Nutzen, 633. Zeichnung, 653. 679
Halbmesser, 121
Halbschatten, III. 1408
Halbes Falconet, II. 533. 553. 562
Hamle, III. 1486
Hand-Faß mit einem Springbrunnen, II. 925
Handgranaten, II. 575
Handmühlen, II. 828. 829
Hangende Mörser, II. 565
Harmonische Proportion, IV. 1644
Harte Haut, III. 954
Haubitz, II. 581
Hauptgegenden der Welt, III. 1133. 1454
Hauptgesimse. Erklärung, 340. Höhe, 359. 364
Hauptlinie, II. 617
Hauptriegel, II. 550
Hausthüre, 450. 451
Haziram, III. 1489
Hebel. Erklärung, II. 748. Eigenschaft, 761. Nutzen, 749
Heber, II. 930. 931. 933
Heilige Drey Könige, III. 1510
Heimliches Gemach, 480. 481
Heliocentrischer Ort, III. 1343
Herbst, III. 1444. 1445
Herbstmonat, III. 1484
Hercules, III. 1191
Heerd, 491. 492
Herons-Brunnen, II. 939
Herz des Löwens, III. 1191
= = Scorpions, III. 1191
Hesperus, III. 1267
Heumonat, III. 1484
Hexaëdrum, 252
Himmelskugel. III. 1128

Hexagonal-Zahl, IV. 1623
Hitzige Striche Landes, III. 1443
Höhen, wie sie zu messen, 208. 292. III. 967. 979.
wie weit man davon sehen kan, III. 1439
Höhe, des Gemaches, wie sie zu finden, 460
= = des neuntzigsten, wie sie zu finden, III. 1220 1218
= = der Sonne, wie sie zu finden, III. 1171. 1175
= = des springenden Wassers, II. 924
= = des Sternes. Erklärung, III. 1146. wie sie zu messen, 1147
= = des Triangels, wie sie zu finden, IV. 1659. 1661
Hohe Ordnung, 361
Hohles Glas. Erklärung, III. 1017. Eigenschaften, 1027. 1030. IV. 1933
Hohl-Kehle. Erklärung, 343. Zeichnung, 345. Grösse, 359
Hohl-Leisten, 344
Hohl-Spiegel. Erklärung, III. 989. wie er zu machen, 1001. Eigenschaft, 1005. IV. 1933
Holländische Fortification. Maximen, II. 641. Ausrechnung der Winkel und Linien, 642. 643. Grundriß, 651. Profil, 656. was davon zu halten, 657.
Holländisches Fernglas, III. 1033
Holtz. Eigenschaften, 315. warum es in Gebäuden, so viel möglich, zu vermeiden, 316
Horizont, III. 1131
Horizontal-Linie, II. 754. III. 1066
Horizontal-Uhr, Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1530
Horn-Haut, III. 954
Hornung, III. 1484
Hornwerck. Erklärung, II. 635. Zeichnung, 655.
Humor aqueus, III. 955.
crystallinus, III. 954. Eigenschaften, 955. 957.
vitreus, 954
Hund, der grosse und kleine, III. 1190
Hyades, III. 1191
Hydar, III. 1486
Hydra, III. 1190
Hydraulik, II. 911
Hydrostatik, II. 843
Hydrus, III. 1190
Hyperbel. Erklärung, IV. 1698. 1699. Beschreibung, 1700. Asymptoten, 1704. Eigenschaften zwischen den Asymptoten, 1705. 1706. Qua-

dratur, 1852. Subtangens, 1813. 1814. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 1712
Hyperbeln von höhern Geschlechten, IV. 1709. 1713
Hyperbolischer Afterkegel, IV. 1882
Hypothesis, 22

J.

Jacutit, III. 1486
Jährliche Epacten, III. 1501
Jagdhunde, III. 1192
Jahre der Gnaden, III. 1507
Jahres-Anfang, III. 1485
Jahr Termin. Erklärung, III. 1493. verschiedene Arten, 1506. 1507
Jahrzahlen, wie sie mit einander zu vergleichen, III. 1508
Jahrzahl der Märtyrer, III. 1506
Ianuarius, III. 1484
Icosaëdrum. Erklärung, 252. Netze, 254
Idus, III. 1484. 1485
Jenner, III. 1484
Jiar, III. 1491
Immerwährender Calender, III. 1515
Inclination. Erklärung, III. 1338. wie die gröste zu observiren, 2341. wie die übrigen auszurechnen, 1341
Inclination der monatlichen Gränze, III. 1367. 1368
Inclinationswinkel, III. 953
Inclinirte Uhren, III. 1528
Indianer, III. 1190
Indianische Biene, III. 1190
Innere Polygon, II. 617
Instrument die Mittagslinie zu finden, III. 1136. die Soole abzuwiegen, 867
Insuln im Mond, III. 1256
Integral-Rechnung. Erklärung, IV. 1840. Regeln, 1841
Integriren, IV. 1840
Intercolummium, 393
Intervallum, III. 1313
Inversio rationum, IV. 1633
Inwohner der Planeten, III. 1279
Jomada, III. 1491
Jonische Ordnung. Erklärung, 357. Glieder, 372. 373
Irrationalgrösse, IV. 1565
Irrationalzahlen. Erklärung, IV. 1566. ihre Rechnung, 1566. 1567. wie sie aus der Gleichung abzuschaffen, 1729

Irreguläre Cörper, 128
Irreguläre Figur. Erklärung, 128. Eigenschaft, 165. Beschreibung, 168. Ausrechnung, 180
= = Festung, II. 687
= = Platz, wie er zur Regularität zu bringen, II 688 689. wie er zu fortificiren, 689
Italiänische Stunden, III. 1472
Juden Jahr, III. 1491
Jüdische Stunden, III. 1472
Jüdisches Sonnen-Jahr, III. 1492
Julianischer *Periodus*, III. 1504. sein Nutzen, 1504 1505
Julianisches Jahr, III. 1482
Julianische Monate. III. 1484
Julius, III. 1484
Jungfrau, III. 1142. 1190
Junius, III. 1484
Jupiter, III. 1141. seine Flecken, 1272. Streifen, 1268. Bewegung um die Axe, 1269. und um die Sonne, 1283. Aehnlichkeit mit dem Mond, 1277
Jupiters, Monden, III. 1270. ihre Bewegung, 1271. Weite vom Jupiter, 1271. Finsternisse, 1271. 1272. Flecken, 1272
Jupiters-Trabanten, III. 1270

K.

Kälberzähne, 354. wie sie zu zeichnen, 387. wo sie nicht zu gebrauchen, 410
Kämpfer. Erklärung, 402. Glieder, 402
Kalck, von was vor Steinen er zu brennen, 330. 331. Proben, 332. Verwahrung, 332. 333
Kalte Striche Landes, III. 1443. 1444
Kammen, wie sie einzutheilen, II. 787. ihre beste Figur, 788
Kammer, wie sie beschaffen seyn soll, 461. 462 465. 466
Kammer im Mörser, II. 564. in der Mine, II. 586
Kammrad. Erklärung, II. 751. wie es zu machen, 785
Kammerstücke, II. 582
Kapfenster, 501
Karnieß. Erklärung, 342
wesentliche Glieder, 351
andere Glieder, 352. 353
Höhe, 360. Auslaufung, 361
Kartetschen, II. 559
Kegel. Erklärung, 127
Eigenschaften, 233. 234
Ausrechnung, 236. 244

Kegelschnitte, IV. 1681
Kehle, 344
Kehlleisten, 344
Kehllinie. Erklärung, II. 617. ihre Grösse, 626
Keil, sein Vermögen, II. 800. Nutzen in der Artillerie, 561
Kern=Schuß, II. 563
Kessel, II. 564
Kirch=Thüre, 451
Klappen zu Plumpen, II. 920
Klarer Begriff, 7
Kleine Axe in der Ellipsis, II. 1693
= = Defenslinie, II. 616
Kleiner *Radius*, II. 617
der kleine Winkel, II. 618
ein Kleinstes, IV. 1828
Kloben. Erklärung, II. 751 ihr Vermögen, 798. 799
Knall Pulver, II. 528
Knauf, 341
Knoten. Erklärung, III. 1337. wie sie zu observiren, 1339. ihre Bewegung, 1340. 1353
Kohlen zu Pulver, wie sie zu brennen, II. 521. 522. ihre Eigenschaften, 524
Kraft, II. 746
Kraft, etwas unter dem Wasser zu erhalten, II. 869
Kragsteine. Erklärung, 334 Gebrauch, 335 Zeichnung, 336. wo sie nicht zu brauchen, 410
Kranich, III. 1190
Kranz, 342
Kranzleisten, 344
Kronwerck. Erklärung, II. 635. Zeichnung, 655
Krebs, III. 1142. 1190
Kriegsbaukunst, II. 597
Kripplein Christi, III. 1191
Krone, III. 1190
Kropf=Felgen, II. 758
Krumme Linie, 119
Küssen=Riegel, II. 550
Kütt, wie er zu machen, 466. II. 571. welcher zum Glaßschleifen dienlich, III. 1063
Kugel. Erklärung, 126. Eigenschaften, 126. 238. 240 241. 242. IV. 1674. Ausrechnung, I. 242. 243. IV. 1879. Erleuchtung, III. 963. wie das Licht darinnen gebrochen wird, III. 1019. wie einer pfündigen Diameter gefunden wird, II. 538. wie ihre Gewichte zu vergleichen, 806. wie sie zu probiren, 556
Kugel=Circul, III. 1085
Kugel=Lehre, II. 556
Kugel=Säcke, wie sie zu machen, 577. 578

L.

Ladeschaufel, II. 552. 554
Ladung, im Mörser, II. 572. in Stücken, II. 552
Länge eines Ortes, III. 1441

Länge eines Planeten, wie sie zu observiren, III. 1283
zu rechnen, 1343
" = eines Sternes. Erklärung, III. 1194. wie sie zu finden, 1184. zunimmt, 1195. auf jede Zeit auszurechnen, 1196
" = des Tages, wie sie zu finden, III. 1166
Länglichte Raute, 124
Länglichtes Viereck, ibid.
Längster Tag, wie seine Grösse zu finden, III 1451
Lafleten, Erklärung, 542
Zeichnung, 548
Laffetten der Mörser, wie sie zu zeichnen, II. 567. 568
Lager im Mörser, II. 564
Landcharten zu machen, III. 1461
Last, II. 746
Lauf im Geschütz, II. 545
im Mörser, II. 564
Lebendige Kraft, II. 746
Lebendiger Schwefel, II. 520
Lederne Stücke, II. 535
Leer-Bogen, 473
Lehrsatz. Erklärung, 21. 22. was dabey zu bedencken, 22. seine Theile, 22. 23. 24
Lens concava, III. 1017
- - *convexa*, III. 1016
Leo, III. 1143
Leucht-Kugeln. Erklärung, II. 577. wie sie zu machen, II. 580
Leyer, III. 1190
Libra, III. 1143
Licht. Erklärung, III. 949
Eigenschaften, III. 949. 950. 951. 952. 953. 961. 962. 963. warum es von weiten groß aussiehet, 980 wie es geschwächet, 1028. verstärckt, 1008. und gebrochen wird, 1014
Licht des Mondes, wie es ab- und zunimmt, III. 1245. 1246
" " des Mercurii, wie es ab- und zunimmt, 1266
" " der *Veneris*, wie es ab- und zunimmt, 1265
Ligne de defense fichante, II. 616
- - *flanquante*, II. 616
Linea absidum, III. 1312
- - *directionis*, II. 753
Linie im Maasse, 119
" " in der Geometrie, 117
" " Geographie, III. 1431
Linien an der Festung, wie sie einander flanquiren, II. 619
Locus planus, IV. 1756
- - *solidus*, IV. 1756
Löwe, III. 1142. 1190
" " der kleine, III. 1192
Logarithmische Grössen, wie sie zu differentiiren, IV. 1890. zu integriren, 1801

Logarithmische Linie. Erklärung, IV. 1716. Eigenschaften, 1889. Quadratur, 1858. Subtangens, 1776. Nutzen, 1890
Cörper, so daraus erzeuget wird, 1883
Logarithmus. Erklärung, 269. Erfinder, 268. Eigenschaften, 269. 270. 271. Ausrechnung, 272. & sqq. IV. 1891. wie daraus die Zahl zu finden, 1891. wie grosser Zahlen Logarithmi zu finden, I. 278. Differentialgrösse davon, IV. 1890
Luchs, III. 1192
Lucifer, III. 1267
Luft. Erklärung, II. 878. Eigenschaften, 882. 895. schwächet das Licht, III. 963. wie man sie zusammen drucket, II. 894. 895
Luft um den Mond, III. 1257, 1258
Luft-Pumpe, II. 879

M.

Maaß der Linien, 119
Maaß des Winkels, 122. 157
" " des sphärischen Winkels, 1084
Maaß-Staab, die Ordnungen zu zeichnen, 281
Macedonisches Jahr, III. 1490
Machine. Erklärung, II. 747. wie sie auf allerhand Art zu bewegen, 824
Magabit, III. 1486
Mahlerkunst, ihr Grund, III. 977
Mæjazia, III. 1486
Majus, III. 1484
Marchesvan, III. 1491
Mars, III. 1141. wie er durch Ferngläser observiret wird, 1268. seine Streiffen, 1268. Bewegung um die Axe, 1269. Aehnlichkeit mit dem Monde, 1277 eigene Bewegung, 1284
Martius, III. 1484
Mascaam, III. 1486
Materie, IV. 1914
Mathematik, ihr Nutzen, 30. 31
Mathematische Lehrart, Erklärnng, 5. wie weit sie sich erstrecket, 30. ihr Nutzen, 30
Mauer. Erklärung, 418. Beschaffenheit, 431. 432 Bau und verschiedene Arten, 433. 434. 455. 456
Maximen zu erfinden, wo sie anzutreffen, 37. 38
May, III. 1484
Mechanik, II 745
Mechanisch philosophiren, II. 748
Mecheir, III. 1485
Media & extrema ratione secare

secare, IV. 1655. 1656
Meere im Monde, III. 1255
Meersand, wie er im Bauen zu gebrauchen, 329
Meher mah, III. 1487
Mehr, IV. 1554
Menschen im Monde, III. 1260
= = in Planeten, III. 1279
Mensis anomalisticus, III. 1354
- - *Draconticus*, III. 1353
Mercurius, III. 1141. wie er durch Ferngläser observiret wird, 1263. 1264. Bewegung um die Sonne, 1266. 1285. Parallaxis, 1281. Aehnlichkeit mit dem Monde, 1277. 1278
Mercurius in Sole, III. 1264
Meridianus. Erklärung. III. 1130. 1145. 1434. wie der Unterschied der Meridianorum zu finden, 1249
Merz, III. 1484
Mesori, III. 1485
Messen, II. 877
Meßkette, 136
Meßschnure, 136
Meßtischlein., sein Gebrauch, 201
Metall, woraus es gemacht wird, II. 534. Verhältniß, der Schwere, II. 862
Methodus de maximis & minimis, IV. 1828
= = *tangentium inversa*, IV. 1885
Mezaninen, 438
Milchstrasse, III. 1192. 1193
Micrometrum, III. 1260. 1261. 1262
Minen. Erklärung, II. 585 Beschaffenheit, 586. 587 wie sie anzulegen, 590
Minute, 117. III. 1471
Mira, III. 1388
Mittag, III. 1133. 1138
Mittags-Circul, III. 1434
Mittags-Höhe, Erklärung, III. 1146. wie sie zu messen, 1148. und auszurechnen, 1158. Nutzen, 1157
Mittags-Linie. Erklärung, III. 1132. wie sie zu finden, 1134
Mittags-Uhren. Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1533
Mittelpunct des Circuls. Erklärung, 121. wie er zu finden, 165. 224
= = der Hyperbel, IV. 1699
= = der Grösse, II. 576. 762
= = der Schwere. Erklärung, II. 754. wie er zu finden, 756
Mitternacht, III. 1133
Mitternachts-Uhr. Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1533

Mittlere Anomalie. Erklärung, III. 1313. ihr Maaß, 1313. wie sie zu finden,
= = Bewegung, III. 1313
= = Theil eines sphärischen Triangels, III. 1087
Mittlere Zeit, III. 1417
Modul. Erklärung, 359 Eintheilung, 359. wie er zu finden, 363. für die oberen Säulen zu verjüngen, 415. 416
Mörser. Erklärung, II. 564 Materie, 564. Theile, 564. Zeichnung, 566. Richtung, 572. Ladung, 572. wie weit er trägt, 574
Mörser zu Granaten, II. 575
Mörtel, wie er zubereitet wird, 430
Mohren = Jahr, III. 1486
Monatliche Aequation, III. 1361
= = Breite, III. 1369
= = Eccentricität, III. 1357
= = Epacten, III. 1500
Monatliches Argument der Breite, III. 1367
= = = der Länge, III. 1358. 1359
Monatliche Scrupel der Länge, III. 1358. 1359
Mond, wie er durch Ferngläser erscheinet, III 1252
Natur und Beschaffenheit, 1254. 1255. Aehnlichkeit mit der Erde, III. 1259. Bewegung um die Erde, 1349. 1286. Bewegung seiner Knoten, 1353. wie seine Berge zu messen, 1383. Charte darüber, 1384. seine Grösse, 1378. und Weite von der Erde, 1370
Mond = Carten, III. 1384
Mond = Circul, III. 1499. Grösse, 1498
Monden = Jahr, III. 1481
Monden = Monat, III. 1480
Mondepacten, III. 1500
Mondfinsterniß. Erklärung, III. 1248. Ursachen, 1247. 1248. Umstände, 1247. 1248. 1249. 1396. Ausrechnung, 1397. wie sie zu observiren, 1407
Mordad mah, III. 1487
Morgen, III. 1133. wie diese Gegend zu finden, 1138
Morgenröthe, wie lange sie währet, 1216
Morgen = Stern, III. 1267
Morgen = Uhren, III. 1527 Zeichnung, 1535
Motus latitudinis, III. 1354
- - *librationis*, III. 1269
- - *reflexionis*, III. 1301
Muhammedisches = Jahr, III. 1490
Muharam, III. 1491

Muldengewölbe, 472
Multiplication. Erklärung, 42. Regeln für gantze Zahlen, 59. für Brüche, 80. für Buchstaben, IV. 1560. für Irrational-Zahlen, IV. 1570. Zeichen, 1554
Mundstücke, II. 542. 543
Muschellinie, IV. 1713
Musteraka, IV. 1488

N.

Nabe, II. 551
Nabonasserisches Jahr, III. 1485. wie sein Anfang zu finden, III. 1486
Nacht. III. 1469
Nachtslänge, wie sie zu finden, III. 1169
Nadir, III. 1130
Nabase, III. 1486
Nahesäulig, 395
Nahme der Verhältniß, 73
Nahmen der Zahlen, 47
Natürlicher Tag, III. 1469
Nebelichte Sterne, III. 1193
Nebengegenden, III. 1454
Nebenpfeiler, 402
Nebenstriche, II. 616
Nebenwinkel, 133. III. 1086
Neigungswinkel, III. 953
Nenner eines Bruches, 77
Netzförmiches Häutlein, III. 954
Neu-Mond, III. 1246
Niedrige Ordnungen, 362
Nisan, III. 1491. 1492
Nodi. Erklärung, III. 1337
Bewegung, 1340. Ort, 1339. wie sie zu observiren, 1339
Nodus ascendens, III. 1338
- - *australis*, ibid.
- - *borealis*, ibid.
- - *descendens*, ibid.
Nonæ, III. 1484. 1485
Norden, III. 1454
Nordische Krone, III. 1190
Nord-Pol, III. 1128. 1433
Normal-Linie, IV. 1809
November, III. 1484
Numerus polygonus, IV. 1623

O.

Obersaum, 344
Oberschlächtiges Wasserrad. Erklärung, 800
wie es zu theilen, 816. wie das Wasser darauf zu leiten, 813. wo es zu gebrauchen, 812
Objectiv-Glaß, III. 1033
Obliquitas ecliptica, III. 1155
Oblongum, 124
Occasus acronyctus, III. 1207
- - *cosmicus*, III. 1207
- - *heliacus* III. 1209
Ochsen-Auge, III. 955
Octaëdrum, 252
Octante, III. 1117

October, III. 1484
Oefen, wie sie zu verbessern, 488. wie mit einem zwey Zimmer zu heitzen, 489
Ohren-Gewölbe, 472
Olympias, III. 1508
Ophiuchus, III. 1190
Optik. Erklärung, III. 949 Nutzen, III. 946
Opus rusticum, 456
Opposition, III. 1394
Ordentliche Figur, 125
Ordentlicher Cörper, 128
Ordinate, IV. 1678. ihre Verhältniß in der Parabel, 1686. und Ellipsi, 1694
Ordnung. Erklärung, 338. Ursprung, 337. 355. Theile, 350. 351. Zahl, 356. wie von ihnen zu urtheilen, 338. 339. wie sie zu erfinden, 354. und zu zeichnen, 384. 385
Orillon, II. 622
Orion, III. 1190
Ort an dem Circul. Erklärung, IV. 1756. wie er zu construiren, 1765
" " an der *Ellipsi*. Erklärung, IV. 1756. wie er zu construiren, 1762
" " an einer geraden Linie. Erklärung, IV. 1756. wie er zu construiren, 1756
Ort an der Hyperbel. Erklärung, IV. 1756. wie er zu construiren, 1765
Ort zwischen den Asymptoten, IV. 1767
" " an einer Parabel. Erklärung, IV. 1756. wie er zu construiren, 1757
" " der Sonne, wie er zu observiren, III. 1158
" " des Bildes im Spiegel, III. 1005. 1011. IV. 1922
Ort, wo jede Sache gesehen wird, III. 993
Ortus acronyctus, III. 1207
- - *cosmicus*, ibid.
- - *heliacus*, III. 1209
Ost, III. 1454
Oster Fest, wenn es zu feyren, III. 1510. wie es auszurechnen, III. 1511
Ouvrage a Cornes, II. 635
- - *couronné*, II. 635

P.

Pachon, III. 1485
Pagans Fortification, Maximen, II. 658. Rechnung der Winkel und Linien, 659. Zeichnung, 660
Pagomen, III. 1486
Palilitium, III. 1191
Pallisaden, II. 638
Pansterzeug, II. 817
Paophi, III. 1485
Parabola. Erklärung, IV. 1681. 1682. Eigenschaft, Beschreibung, 1683. 1689.

1689. 1757. 1886. 1912. Quadratur, 1844. Rectification, 1865. Subtangens, 1810. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 1710
Parabeln von höherem Geschlechte. Erklärung, IV. 1679. Beschreibung, 1684. 1685. Eigenschaften, 1689. Subtangens, 1808. Quadratur, 1845. Rectification, 1868
Parabolischer Afterkegel, IV. 1862. 1880
Parallaxis Erklärung, 1224
Eigenschaften, 1224 1225. 1226
Parallaxis der Erdbahn. Erklärung, III. 1344. wie sie zu finden, 345
" " der Fixsterne, III. 1302 1303
" " *Martis*, III. 1373
" " *Mercurii*, III. 1235
" " der Sonne, III. 1373
Parallel-Circul, III. 1373
Parallelepipedum. Erklärung, 127. Eigenschaften. 127. 227. 229. 244. IV. 1836. 1837. Ausrechnung, 229. 230. Netze, 254
Parallel-Linien. Erklärung, 125. Beschreibung, 147. Abstreckung auf dem Felde, 153. Eigenschaften, 151. 152. 155
Parallel-Lineal, Structur und Gebrauch, 147. 148
Parallelogramma. Erklärung, 126. Eigenschaften, 176. 189. 190. Theilung, 190. 222.
Parameter, IV 1682. 1690. 1698
Partial-Finsterniß. Erklärung, III. 1482. wie ihre Grösse zu finden, 1402
Particula exsors, III. 1360 1361
Paternoster-Werk, II. 913
Pauni, III. 1485
Pegasus, III 1190
Pentagonal-Zahl, IV. 1623
Perigæum, III. 1312
Perihelium, ibid.
Periodischer Monat, III. 1350
Periodus Juliana, III. 1504
Perpendicul an Uhr-Werken, II. 837. 838
Perpendicular-Linie. Erklärung, 123. Beschreibung, 148. 149. 159
Perser-Jahr, III 1487
Perseus, III. 1190
Perspectiv, III. 1065
Perspectivische Risse, 510
Petarde, II. 582. 583
Petrus, III. 1191
Pfähle, wie sie zum Grundbaue beschaffen seyn sollen, 422. 423. was bey dem Einrammen in acht

zu

zu nehmen, 423
Pfau, III. 1190
Pfeil, ibid.
Pfeiler, 334. wie sie ins Perspectiv zu bringen, III. 1070
Pflaster, was für Figuren der Steine sich dazu schicken, 462
Pflaster-Ziegel, 462
Pfuhl, 344
Phamenoth, III. 1485
Pharmuthi, ibid.
Phœnix, III. 1190
Phosphorus, III. 1267
Pilaster, 334
Pisces, III. 1143
Places d'armes, II. 681
Plagæ, III. 1454
Planet. Erklärung, III. 1143. Bewegung durch den Thier Kreiß, 1285. 1286. 1328. wie die Eccentricität nebst dem Aphelio gefunden wird, 1332. wie ihre Grösse zu finden, 1379. Inwohner, 1279. ihre Natur, 1277. 1278. Verdeckungen unter einander, 1280. scheinbare Diameter, 1280. 1282. Weite von der Sonne, 1321. und von der Erde, 1376. 1345. 1281. warum sie stille stehn und zurück gehn, 1298. 1299
Planeten-Stunden, III. 1472
Platten. Erklärung. 343 Grösse, 359
Platter Spiegel, Erklärung, III. 989. wie er zu machen, 990. 991. Eigenschaften, IV. 1923
Plättlein. Erklärung, 343. Grösse, 359
Plejades, III. 1191
Plumpe, II. 917. 918. 919
Plumpstock, II. 918
Polarcircul, III 1145
Polaruhren. Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1536
Pol der Kugel, III. 1085
Pole der Ecliptick, III. 1155
Pohlhöhe, wie sie zu finden, III. 1149. 1154. 1158
Pollux, III. 1191
Polus antarcticus, III. 1128
- - *arcticus*, ibid.
Polygonalzahl. Erklärung, IV. 1623. wie sie zu finden, 1625
Polygone, 125
Polygonwinkel, 165
Polyhedrische Gläser, III. 1058
Polynomische Wurtzel, IV. 1586
Polyoptrische Gläser, III. 1058
Postement. Erklärung, 339. Beschaffenheit, 353. 405. Höhe, 360. Eintheilung, 363. Gebrauch, 340. 341

Postement Gesimse. Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 351. 352. Höhe, 360 Auslaufung, 361
Postulata, 17
Potagen-Heerd, wie er zu bauen, 492
Potenz. Erklärung, IV. 1562. Grade, 1563. Zeichen, 1563. Rechnung, 1563. 1564
Præsepe, III 1191
Prisma. Erklärung, 126. Eigenschaft, 126. 227. 228. 244. Ausrechnung, 230. Netze, 255
Profil, II. 656. Zeichnung, 656. 657. wie sein Superficial-Inhalt zu finden, 707. wie der cörperliche zu finden, 711
Progressio arithmetica, 74. Eigenschaften, IV. 1613
- - *geometrica*, 74. IV. 1613
Proportio continua. Erklärung, 74. Eigenschaften, 94. 95. IV. 1631
Proportion. Erklärung, 73. Zeichen, 72. Eigenschaften, 94. 95. 96. 97. III. 1010. 1111. IV. 1630. 1633
Proportionallinien, wie sie zu finden, 197. IV. 1774
Proportionalzahlen, 96. 97.
Prostaphæresis, III. 1315
Pultdach, 500
Pulver, wie es gemacht, wird, II. 525. 526. Ursachen der Würkung, 526. Sätz, 526. womit es anzufeuchten, 525. 527. wie es reissend wird, 527. wie man es probiret, 529. 530. 531. wozu es Anlaß gegeben, 518
Pulvermühlen, II. 527
Pulversätze, II. 526
Punct. Erklärung, 117. warum er untheilbar, 117. 118. 121
Puncta flexus contrarii, IV. 1901
Pupilla, III. 954. 960
Püschelkunst, 913
Pycnostylon, 395
Pyramide. Erklärung. 28. Eigenschaft, 128. 232. 233. 234. 244. Ausrechnung, 236. Netze, 255
Pyrobologia, II. 517
Pyrotechnia, ibid.

Q.

Quadrat. Erklärung, 124. Beschreibung, 170. 189. Eigenschaften, 172. Ausmessung, 174. 175 wie es ins Perspectiv zu bringen, III. 1067. 1068
Quadratische Gleichung, Erklärung, IV. 1588.

wie sie aufzulösen, 1588
Exempel, 1590. 1591
Quadratlinie, 174
Quadratmaaß, 174. 175
Quadratrix, IV. 1716
Quadratruthe 174
Quadratschuhe, ibid.
Quadratur des Circuls, IV. 1853
= = der krummen Linien, IV. 1844
Quadratus, III. 1394
Quadratwurzel. Erklärung, 82. wie sie gefunden wird, 85. IV. 1587. ihr Logarithmus, 270
Quadratzahl. Erklärung, 83. IV. 1623. wie sie entstehet, 84. 85. IV. 1586. 1587. 1588. Eigenschaften, 1745. ihr Logarithmus. 270. ihre Differentien, IV. 1605
Quadratzoll, 175
Quartier-Feld-Schlange, II. 533. 553. 562

R.

Rabe, III. 1190
Rabia, III. 1401
Rad an einer Axe, II. 749
Radliniel, IV. 1717
Radius des Circuls, 121. 129. 262
= = der Evolute, IV. 1909
Räder der Lafetten, wie sie zu zeichnen, 551
= = in der Mechanik, wie sie zu berechnen, II. 781
Räderwerk ohne Kammen, II. 790
Rajob, III. 1491
Ramadan, ibid.
Rarsäulig, 395
Rasen, II. 717
Ravelin. Erklärung, II. 632. Nutzen, 632. Zeichnung, 653. 662. 679
Raute, 124
Rechenkunst. Erklärung, 37 wie sie abzuhandeln, 37
Rechnungsarten, ihr Ursprung, 40. 41. ihre Anzahl, 41. Nahmen und Erklärungen, 41
Rechter Winkel, 123. 158
Rechtwinklichter Triangel. Erklärung, 123. Eigenschaften, 150. 187. IV. 1661. 1663 1669. 1785. 1795. wie sein Inhalt zu finden, IV. 1656
Rectangulum. Erklärung, 124. Beschreibung, 171. Eigenschaft, 172. Ausrechnung, 175
Rectification der krummen Linien, IV. 1865
Regel, III. 1191
Regel Detri, 99
Redoute. Erklärung, II. 702. Grundriß, 703. Profil, 704
Reduction zur Ecliptik, III. 1339. 1342
Reflexion. Erklärung, III. 951

951. Gesetze, 951. 952. IV. 1920
Reflexionswinkel, III. 951
Refraction. Erklärung, III. 952. Gesetze, IV. 1927. wie ihre Grösse zu observiren, III. 1014. 1015
Refraction der Sonne, III. 1228. 1229. 1230
Refractions-Winkel, III. 952
Refringirter Winkel, III. 953
Regel *de quinque*, 103. 104
Regiments-Stücke, II. 533. 553. 562
Reguläre Festung, II. 687
Reguläre Figur. Erklärung, 125. Eigenschaften, 161. 162. 165. 181. Beschreibung, 168. 169. Ausrechnung, 180
Reguläre Cörper. Erklärung, 128. Anzahl, 251. Netze, 253
Reguläres Dreieck. Wie seine Seite sich zum Diameter des umschriebenen Circuls verhält, IV. 1648
Reguläres Vieleck. Wie es zu beschreiben. 168. 169. Ob Renaldinus es richtig zu beschreiben angewiesen, IV. 1671
Regula composita, 103. 104
Regula societatis, 104. 105
Regulus, III. 1191
Reißbret, 382
Reißkohlen, II. 522
Reißschiene, 383. 384
Retrogradus, III. 1285
Rhombus. Erklärung, 124. Beschreibung, 171. Eigenschafft, 175. Ausrechnung, 177
Riemlein, 344
Rinnleisten, 344
Ring um den Mond in der Sonnen-Finsterniß, III. 1243. 1244
Ring um den ♄, III. 1277
Röhre, II. 911
Röhren zu Fern-Gläsern, III. 1042
Römer Zinß-Zahl. Erklärung, III. 1503. wie sie zu finden, ibid.
Römische Ordnung, 358. 374
Römischer Calender, III. 1484
Rolle, 752
Romanische Treppe, 496
Roß-Mühlen, II. 825. 826
Rost zum Grundbaue, 426. 427
Rückgängig, III. 1285
Ruhepunct, II. 752
Ruhe-Riegel. II. 550
Ruthe. Erklärung, 119. Zeichen, 122

S.

Saal. Wie er beschaffen seyn soll, 461. 475. 476. 477

Sächsische Raute, III. 1192

Säule. Erklärung, 333. 339. Wie sie zu proportioniren, 335. 336. Höhe, 360. wie sie zu verdünnen, 337. 390. wie eine über die andere zu stellen, 414. ihr Rang, 414

Säulen-Laube, 393

Säulenstellung, ibid.

Säulen-Stuhl, 339

Säulen-Weite. Erklärung, 339. Grösse. 394. 395. 396. was dabey in acht zu nehmen, 395. 396. 397

Salpeter. Wie er zu läutern, II. 518. woher er kommet, 519. Eigenschafften, 223. 524. 525

Sand. Wie er beschaffen seyn soll, 328. Probe, 328. 329. Arten, 329

Sappiren, II. 735. 736

Satellites Jovis, II. 1270

Saturnus, III. 1141. seine Gestalten, die man durch das Fern-Glaß observiret, 1275. 1276. Aehnlichkeit mit dem Monde, 1277. Bewegung um die Sonne, 1284

Saturnus-Monden, III. 1273. 1274

Satz zu Feuer-Kugel-Zeug, II. 576

Schafft. Erklärung, 341. Beschaffenheit, 348. 359. 361. wesentliche Glieder, 351. Höhe, 361

Schafft-Gesimse. Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 352. Höhe, 360. Auslauffung, 361

Schalt-Jahr, III. 1481. 1482. 1483

Schalt-Tag, III. 1481. 1482

Schantz-Körbe, II. 719

Scharivar mah, III. 1487

Schatten. Erklärung, III. 949. Eigenschafften, 949. 965. 966. 967. wie seine Länge zu finden, 966. 967. 968. wie dadurch die Höhen zu messen, 967. seine Figur, 969. 970. 971. wie er perspectivisch zu zeichnen, 1074

Schatten der Berge, im Monde, III. 1253. 1257

Scheere. Erklärung, II. 634. Zeichnung, II. 654

Scheibe des Klobens, II. 751

Scheinbare Grösse. Erklä-

klärung, III. 978. wie sie zu finden, 979
Scheinbare Horizontal-Linie, II. 755
Scheinbarer Diameter der Sterne, III. 1280. 1281
Scheinbarer Horizont, III. 1132
Scheinbare Zeit, III. 1470
Scheitel, IV. 1678
Schemmel-Mörser, II. 566
Schiefe Ascension. Erklärung, III. 1161. wie sie zu finden, 1161. 1162
Schiefe der Ecliptick, III. 1155
Schiefe Descension, III. 1161
Schiefliegende Fläche, II. 752 791. 792. 848
Schieß-Scharten, II. 718
Schiff Jasons, III. 1190
Schlange, II. 533. 553. 562. III. 1190
Schlangen-Mann, III. 1190
Schluß-Stein. Wie er zu zeichnen, 409
Schnellwage, II. 769. 770
Schnörckel, 357. Zeichnung 387
Schönheit, Erklärung, 307
wie sie zu erkennen, 308
Schönsäulig, 395
Schöpff-Rad, II. 916
Schöpff-Werck, II. 915
Schorstein, 502
Schrancken der Wurtzeln in Gleichungen, IV. 1733
Schraube. Erklärung, II. 750. ihr Vermögen, 794 ihre Eintheilung, 794. 795
Schrauben-Mutter, II. 752
Schraube ohne Ende, II. 796
Schrifft. Wie sie auszulegen, III. 1295
Schüsseln zum Glaßschleifen, III. 1060. 1061
Schütze, III. 1142. 1190
Schüsse eines Stückes. Wie weit sie gehen, II. 561
Schuhe. Erklärung, 119. Zeichen 122
Schulter-Winckel, II. 618
Schwan, III. 1190
Schwantz-Riegel, II. 550
Schwartze Haut, III. 954
Schwere. Erklärung, II. 755. ist unter dem Æquatore kleiner als gegen die Pole, III. 1301. 1302
Schwere der Cörper in

flüßiger Materie, II. 851 865
der Luft, III. 883. 886.
der Metalle und anderer Cörper, II. 862
Schwefel. Wie er zu läutern, II. 520. 521. welcher zum Pulver am besten, 520. wozu er dienet, 521. Eigenschaften, 523. 524. 525
Schweif der Cometen. Was er sey, III. 1392
Schwung-Räder, II 837. 838
Sclerotica, III. 954
Scorpion. III. 1142. 1190
Scorpius, III. 1143
Scrupel der Breite, III. 1367. 1368. 1369
der Währe, III. 1421. 1422
der Verfinsterung, III. 1401. 1402. 1420
Secans. Erklärung, 262. Ausrechnung, 268. Logarithmus, 280
Sechseck. Erklärung, 125. Eigenschaft, 170. Beschreibung, 170
Secondfianc, II. 616
Sectio divina, IV. 1655
Sector. Eigenschaft, 182. Ausrechnung, 187
Secunde. 122. III. 1471
Wie sie in Trigonometrischen Rechnungen zu finden, I. 284
Secundirende Linie, II. 602
Seele eines Stückes, II. 542. 544. 549
Sehne, 121
im Circul, 161
in der Parabel, IV. 1687
Seite der Polygonal-Zahl, Erklär. IV. 1624. wie sie zu finden, 1627
Semidiameter, 121
Semiordinate, IV. 1678
Senckrechte Linie, 123
September, III. 1484
Serpentinel, II. 533. 553. 562
Setzer, II. 555
Setz-Kolben, ibid.
Sextilis, III. 1394
Schaaban, III. 1491
Schabat, III. 1489
Schavvall, III. 1491
Schebat, ibid.
Sicherpfahl, II. 823
Sichtbare Bewegung des ☽ von der ☉, III. 1414. 1415
Breite des ☾ III. 1417
Finsterniß, III. 1242
Länge des ☽, III. 1410
Sichtbahre Zusammenkunfft, 1416
Sidera Medicæa, III. 1270
Vrbanoctaviana, III. 1274

Siebengestirn, III. 1191
Siegel-Wachs. Wie es zu machen. III. 1063
Sinus. Erklärung, 261. Eigenschaften, 261. 262. 280. Ausrechnung, 264. Gebrauch, 281. IV. 1875. wie besonders der von 18°, IV. 1655. der von 22° 30′ 1650. der von 60°, 1649. und eines vielfachen Bodens zu finden, 1664. wie ihre Logarithmi zu suchen, I. 276. wie aus ihnen die Bogen zu finden, IV. 1873
Sinus artificialis, III. 1100
complementi, 262. 264.
totus, 262
versus, 262. IV. 1875
Sivan, III. 1491
Solstitium. Wie es zu observiren, III. 1305
Sommer, III. 1444
Sonne. Ihre Flecken, III. 1233. Natur, 1234. Figur, 1236. Bewegung um die Axe, 1236. Bewegung durch den Thier-Kreiß, 1139. 1140. 1308. ob sie sich um die Erde beweget, 1293. 1295. ihre Eccentricität, 1312. wie sie die Fläche beschei-net, 1524. 1525. ihre Weite von der Erde, 1376. ihre Grösse, 1379. 1381
Sonnen-Circul. Erklärung, III. 1495. Grösse, 1496. wie er zu finden, 1497
Sonnen-Finsterniß, Erklärung, III. 1242. Umstände und Beschaffenheit, 1239. 1243. 1244. 1245. Ursache, 1241. 1242. 1257. wo sie gesehen wird, 1409. wenn sie sich ereignet, 1410. wie sie ausgerechnet, 1410. und observiret wird, 1425
Sonnen-Jahr, III. 1480. wie seine Grösse zu finden, 1308
Sonnen-Monath, III. 1479
Sonnen-Stunden, III. 1164
Sonnen-Uhr, III. 1523
Sonntage. Auf welche Tage im Jahre sie fallen, III. 1498
Sonntags-Buchstaben, Erklärung, III. 1479. wie er zu finden, 1497
Sophar, III. 1491
Sphæra obliqua, III. 1450
parallela, III. 1448
recta, III. 1447
Sphærica, III. 1125

Sphärische Spiegel, III. 990
Sphärischer Triangel. Erklärung, III. 1083. Eigenschaften, 1087. 1089. 1090
Sphärische Trigonometrie, III. 1083
Sphärischer Winkel, III. 1084
Spica virginis, III. 1191
Spiegel. Erklärung, III. 989. Eigenschaften, IV. 1921
Spiegel-Gewölbe, 472
Spiel-Raum Erklärung, II. 535. wie er zu finden, 536. sein Nutzen, 536
Spindel, II. 752
Spiral-Linie. Erklärung, IV. 1718. Subtangens, 1760. Quadratur, 1859
Spiral-Linien von unendlichen Geschlechten. Erklärung, IV. 1718. Subtangens, 1821. 1822. Quadratur, 1860. 1861
Spitziger Winkel, 123. 158
Spitzwincklichter Triangel, 123
Springbrunnen durch den Fall, II 924. durch Heber, 930. durch die Wärme, 939. durch die Luft, 936
Spring-Brunnen, der unterweilen aufhöret, II. 932
Stab. Erklärung, 343. Zeichnung, 344. Grösse, 359
Stäblein, 343
Staberzeug, II. 817
Stadt Thor, 451
Stärcke der Linie, II. 602
Stamm, 341
Stampffer, II. 555
Stangen-Zirckel, 121
Stationarius, III. 1285
Stechheber, III. 929
Stehende Mörser, II. 565
Steine. Wie ihre Güte zu erforschen, 322. wenn sie sollen gebrochen werden, 323. wie man sie öltränckет, 467. wie sie im Grundbaue zu legen, 427
Steinbock, III. 1142. 1190
Stein-Carthaunen, II. 582
Stein-Galle, 323
Steinhauen. Wie es beschaffen, 472
Stein-Klippen im Monde, III. 1256
Stein-Stücke. II. 582
Stell-Riegel, II. 550
Stengel, 354
Stern. Wie lange er über dem Horizont bleibet, III. 1198.

1198 wenn er in Meridianum kommet, 1199. 1202. wie er darinnen zu observiren, 1151. wenn er auf- und untergehet, 1200. mit welchem Puncte der Ecliptick er aufgehet, 1203. 1204. 1206. wenn er mit der Sonne untergehet, 1207. wenn er sich unter die Sonnen-Strahlen verbirget und wieder herausrücket, 1210 welche niemals auf- und die niemahls untergehen, 1212. 1213. ihre scheinbare Grösse, 1194. ihre Anzahl, 1189. 1193. Weite von der Erde und Natur, 1387. besondere Namen derselben, 1190

Stern im Auge, III. 954
SternRad, II. 751
Sternschantze Erklärung, II. 702. Grund-Riß, 705
Stiefel im Druckwercke, II. 920
Stillstand eines schweren Cörpers, II. 755. 756. 758. 760
der Planeten, III. 1284
Stier. III. 1142. 1190
Stinckende Kugeln, II. 577
Stirn-Rad. II. 751. 785
Stock-Panster, II. 819
Stoß im Mörser, II. 564
Straub-Zeug, II. 817
Streiche, II. 615
Streichende Defens-Linie, II. 616
Streich-Winkel, II. 618
Streiffen, 344
Stuben. Wie sie beschaffen seyn sollen, 461. 475. 476
Stücke. Erklärung, II. 532. Arten, 532. Materie, 534. Theile, 542. 543. Beschaffenheit, 542. Ladung, 553. Richtung, 559. 560. Länge, 544. 545. Zeichnung, 546
Stückgiessen, II. 534
Stück-Pulver, II. 526
Stütze. Erklärung, 333. Gebrauch, 335. Beschaffenheit, 336. 337
Stumpffer Winkel, 123. 159
Stumpff wincklichter Triangel, 123
Stunde. Erklärung, III. 1471. Arten, ibid. wie sie mit einander zu vergleichen, 1473
Stunde der ersten Bewegung, III. 1164
Stuffen auf der Treppe. wie sie seyn sollen, 594. 495
Sturtz-Rinne, 344
Subnormal-Linie. Erklä-

klärung, IV. 1809. wie sie zu finden, 1816
Subtangens. Erklärung, IV. 1808. wie sie zu finden, 1809
Subtrahiren. Erkärung, 42. Regeln für gantze Zahlen, 42. für gebrochene, 79. für Buchstaben, IV 1556. 1557. für Irrationalzahlen, 1568. Zeichen, 1.57. IV. 1553.
Süden, III. 1454
Süder-Pol, III. 1129. 1433
Südische Krone, III. 1190
Summe, 41
Summiren, IV. 1840
Summirende Zahlen, 41
Syllogismus. Nutzen in der Mathematik, 27
Symmetrie, 313
Syne, III. 1486
Synodischer Monath, III. 1489
Systema mundi Copernicanum, III. 1302
Tychonicum, III. 1288. 1291
Systylon, 395

T.

Tabulæ æquationum, III. 1323
curtationum, III. 1343
inclinationum, III. 1342
latitudinum & longitudinum, III. 1188. 1189
motus latitudinis, III. 1354
motuum mediorum, III. 1310
sinuum & tangentium, 263
Tag. Erklärung, III. 1469. Wenn er die gantze Nacht durchschimmert, 1213. 1214. Wie er ab- und zunimmet, 1445. wie lang er währet, III. 1166
Tage-Circul, III. 1133
Tages-Anbruch. Erklärung, III. 1211. Ursache, 1212. wie er auszurechnen, 1213. 1214
Talud, II. 609
Tamuz, III. 1489. 1491
Tangens. Erklärung, 262. Ausrechnung, 267. Gebrauch, 285. 286. 287. Logarithmus, 279. Eigenschafften, 285. Wie daraus der Bogen zu finden, IV. 1870
Tangens des vielfachen Winkels. Wie er zu finden, IV. 1667
der krummen Linien. Erklärung, IV. 1808. Wie er zu finden, 1809
Tauffe der Feuer-Kugeln, II. 579
Taurus, III. 1143

Tebeth,

Teheth, III. 1492
Tekuphæ, III. 1439
Tenaille simple, II. 634
double, II. 634.
Terreplain, II. 609
Tetraëdrum. Erklärung, 252. Netze, 253
Theilung der geraden Linie, 198
Theorema, 21
Theorema Pythagoricum, 187. 188
Theorica, III. 1125
Thermometra concordantia, II. 901
Thermometrum, II. 896
Thermoscopium, ibid.
Thesis, 22
Thier-Kreiß, III. 1144
Thor an einer Festung, II. 720
Thoth, III. 1485
Thüre. Erklärung, 450
Breite und Höhe ibid.
Figur, 451. Wie sie ins Perspectiv zu bringen, 1071
Thüre, die spritzet, wenn man durchgehet, II. 925
Thür-Schwellen. 452
Tieffe der Sonne, wenn der Tag anbricht, III. 1211. wie sie zu finden, 1217
Tielen, 461
Tishrin, III. 1489. 1491
Todte Kraft, III. 746
Tonnen-Gewölbe, 471
Torricellianische Röhre, II. 890
Toucan, III. 1190
Total-Finsterniß, III. 1402
Transcendentische Linie, IV. 1679
Transporteur, 123
Trapezium. Erklärung, 125
Wie es zu theilen, 191
Traversen. Erklärung, II 638. Nutzen, 638. Zeichnung, 682.
Trenchéen, II. 726
Treppe. Erklärung, 493. Beschaffenheit, 493. 494 495. Zeichnung, 496
Triangel. Erklärung, 123. Eigenschafften, 128. 150. 153. 155. 156. 177. 187. 195. 196. 198. III. 1089. IV. 1667. Beschreibung, I. 140. 141. Ausrechnung, 178. IV. 1661. Theilung, I. 223. wie er ins Perspectiv zu bringen, III. 1066. 1067
Triangel. Der südische, III. 1190. der nordische, 1190
Triangular Zahl, IV. 1623
Triangulum æquatorium, II. 1315
æquilaterum, 124
æquicrurum, ibid.
Scalenum, ibid.
Triglyphen, 386
Trigonometrie. Erklä-

261. Nutzen, 259. 260
Trigonus, III. 1394
Trillings-Stöcke, II. 787
Trinomische Wurtzel, IV. 1586
Trompeter Gänglein, 449
Tropicus cancri, III. 1144.
capricorni, III. 1434
Trilling, 751. 789
Tünchen, 455. 456
Tuscanische Ordnung. Erklärung, 357. Glieder 365
Tybi, III. 1485
Tykymt, III. 1486
Tyr, III. 1486
Tyshas. III. 1486

V. U.

Variation, III. 1365. 1366
Vaubanische Fortification Maximen, II. 673. Ausrechnung der Linien, 674. Grund-Riß, 676. Profil, 680. Werth, 689
Verstärckte Manier, Maximen, 683 Grundriß, 684 Werth, 686
Vendar, III. 1491
Ueberschlag, 344
Vectis homodromus, II. 775
heterodromus, ibid.
Ventil. II. 918
Venus, III. 1141. ihre Aehnlichkeit mit dem Monde, 1277. Flecken, 1268. Berge, 1267. Bewegung um die Axe, III. 1269. um die Sonne, 1265. 1284
Venus in Sole, III. 1264
Veränderliche Grösse. Erklärung, IV. 1801. Zeichen, 1802
Verbürste Circul, 471
Verdeckter Weg, II. 637
Verdruckte Circul, 471
Verdünnung der Säulen, 337
Vergrösserungs-Gläser, III. 1029. 1030. 1052. wie viel sie vergrössern, 1050. 1051
Verhältniß, 73. ihre Veränderungen, IV. 1633. 1634. welche in der Baukunst zu gebrauchen, I. 310. 311
Verhältniß der Irrationalen Grössen, IV. 1568
Verjüngter Maaß-Stab, 136. 100. 201
Verkleinerungs-Gläser, III. 1030. 1031
Verkehrte Regel Detri, 102
Verkehrter Karniß, 364
Vertical-Circul, III. 1145
Vertical-Uhren, III. 1527
Vertical-Winkel, 133 III. 1086

Vielecke, 125
Vieleckichtes Glaß, III. 1057
Viertel des Monds, III. 1246
Viertel-Feld-Schlange, II. 533. 553. 562
Viertel-Feld-Stücke, ibid.
Viertel Stab. Erklärung, 343. Zeichnung, 344. Grösse, 359
Vindemiatrix, III. 1191
Virgo, III. 1143
Visir Schuß, II. 563
Visir-Stab, 245. 246
Unbeweg. Feste, 1509. 1510
Undeterminirte Aufgabe, IV. 1743. Exempel dazu, ibid.
Undeutlicher Begrif. Erklärung, 7. wenn man mit ihm zufrieden seyn kan, 8
Unendlich kleine Grösse, IV. 1799. 1800.
Unförmige Sterne, IV. 1192
Ungerade Zahlen. Ihre Eigenschafften, IV. 1608. 1609. 1610.
Ungleichseitiger Triangel, 124
Unordentliche Figur, 125
Unordentliche Cörper, 128
Unter-Balcken, 342
Untergang der Sterne, III. 1133. 1200
der Sonne, III. 1180
Unsichtbar. Warum einige Sachen werden, III. 957
Unsichtbare Finsterniß, III. 1242.
Untersaum, 344
Unterschied, 42
Unterschlägtiges Wasser-Rad. Erklärung, II 801. wo es zu gebrauchen, 812. wie das Wasser darauf zu leiten, 819
Unveränderliche Grösse. Erklärung, IV. 1801
Zeichen, 1802
Unvollständiger Begrif, 8
Vollerde, III. 1386.
Vollmond, III. 1246
Vollkommenheit einer Festung, II. 597
eines Gebäudes, 307
Vollständiger Begrif, 7
Vorgebürge im Monde, III 1255
Vorgemächer. Wie sie beschaffen seyn sollen, 461
Vorstechung, 340

W.

Waende. Wie sie ins Perspectiv zu bringen, III. 1070
Wärme. Wie sie bald ins Zimmer dringet, 488
Wässerige Feuchtigkeit, III. 955
Waffen Plätze, II. 681
Wage. Erklärung, II. 764

wie

wie sie zu machen, ibid.
zu probiren, 765
Waage, III. 1142. 1190
Wahre Bewegung, III. 1314
Wahrer Horizont, III. 1131
Wahre Wurzel, IV. 1718
Wall. Seine Nothwendigkeit, II. 606. Höhe, 611. 612. Figur, 613. 614.
wie er aufzuführen, 716
Wallfisch, III. 1190
Wallgang, II. 609
Walze, 126
Wandpfeiler, 334
Wand-Säule, ibid.
Wasser. Wie es zu Bewegung der Mühlen gebraucht wird, II. 801
Wasserkunst, II. 922. 923
Wasser-Schlange, III. 1190
Wassermann, III. 1142. 1190
Wasser-Schraube, II. 911
Wasser-Stand, II. 812
Wasserwägen, II. 805, 809
Wasser-Wage, II. 805
Wehr-Bau, II. 821
Weinmonat, III. 1484
Weiten der Oerter. Wie sie zu messen, 134. 144. 145. 201. 294. 295. III. 1435. 1460
der Planeten von der Erde, 1376. 1345 1348.
von der Sonne, III. 1321. 1347
der Sterne. Erklärung, III. 1177. wie sie zu observiren, 1177. 1178. Nutzen, 1180
Weitsäulig, 395
Welsche Practica, 108
Welt. Wie sie aussiehet, III. 1126. 1127
Welt-Axe, III. 1129
Welt-Baue, (neue) 1387
Welt-Gebäude. Wie es beschaffen, III. 1296
Welt-Gegenden, III. 1454. 1455
Welt-Kugel III. 1127
Welt-Pole, III. 1128
Wendel-Treppe. Erklärung, 495. Beschaffenheit, 496. Zeichnung, 497
Wendungs-Punct. Erklärung, IV. 1901. wie er zu finden, 1904
Weniger, IV. 1553
Wesentliche Glieder, 351
Wetter-Glaß. Wie es zu machen, II. 897. Besondere Phænomena, 899. 900
Widder, III. 1142. 1190
Wiederkehrungs-Punct. Erklärung, IV. 1901

Wie

Wie er zu finden, 1904
Wiederlage der Gewölber, 474
Widerstand in Bewegung der Machinen, II. 835
Widerstehende Krafft, II. 844
Winkel. Erklärung, 122. Maaß, ibid. Eigenschafften, 130. 131. 153. 154. 157. Wie er zu messen, 134. zu beschreiben, 136. auf dem Felde abzustecken, 144. Theilung in zwey Theile, 164
Winkel in regulären Vielecken, 195. in jedem Vielecke. 166
Winkel, der allzuspitzig. Wie er zu fortificiren, II. 697. der einwarts gebogen. Wie er zu fortificiren, 698
Winkel an der Peripherie, 157. 158
an der Sonne, III. 1314. 1344
Winkelhacken, 150. 159
Winkelmesser, 123
Wind, II. 537
Wind-Mühlen, II. 824. 825
Wind-Raum, II. 535
Windwage. Erklär. II. 879. Wie sie zu machen, 903. und zu gebrauchen, 904
Winter, III. 1444
Wintermonat, III. 1484
Wischer, II. 555
Wischkolben, ibid.
Woche, III. 1478
Wolff, III. 1190
Wohlgereimtheit, 313
Würffel, 127
Würffel in der Baukunst. Erklärung, 341. Beschaffenheit, 348. 349. Höhe, 360. Auslauffung, 361
Wulst, 344
der wunderbare Stern, III. 1388
Wurtzel. Ihre Arten, 1591. IV. 1718. Rechnung mit Buchstaben, 1563. wie sie aus jeder Dignität zu ziehen, 1620. Auszihung, I. 86. 91
Wurtzel der Gleichung. Erklärung, IV. 1718. Eigenschafften, 1719. 1720. Veränderung, 1721. Schrancken, 1733. Ausziehung, 1735. Wie sie durch Näherung zu finden, 1738
Wurtzel-Täfelein, 84
Wurtzel-Zeichen, IV. 1565

Y.

Yezdegertisches Jahr, III. 1487. 1488. wie sein Anfang zu finden, 1488

Z.

Z.

Zapffen, 386
Zahl. Erklärung, 38.
Beschaffenheit, 39. 40.
ihre Veränderungen, 40.
41. wie sie ausgespro-
chen wird, 47. 48
Zahl der Winkel in der Po-
lygonal-Zahl, IV. 1625
Zapffen-Stücke, II. 542.
543
Zauber-Laterne, III. 1054
Zeheneck. Wie seine Seite
zu finden, IV. 1652. 1653
Zehlen. Was es heisse. 38
Zehler eines Bruches, 77
Zeltdach, 500
Zeichen der Zahlen, 47
der Zeit, III. 1493. 1494
Zeichnen. Wie solches ge-
nau geschehen kan, III.
1078
Zeichnung der Figuren,
142. was sie nutzet, 143
Zeiger. Die Mittagshö-
hen zu finden, III. 1150
Zeit. Wie man sie aus der
Höhe der Sonne, 1171.
und der Sterne findet,
1220. 1222. 1223
Zenith, III. 1129
Zeugmeistereykunst, II. 517
Zerstreuungs-Punct, III.
1028
Ziegel. Wie sie zu streichen,
324. zu probiren, 327
Ziegel-Erde, 327
Zieh-Panster, II. 819
Zieh-Pengel, II. 796
Ziffer. 47
Zimmer. Ihre Figur, 458.
Verhältniß der Länge
zur Breite, 459. Höhe,
459. 460. wie sie anzu-
legen, 478. 479
Zierrathen des Gebäudes.
Erklärung, 308. wie viel
sie nöthig, 309. 310.
Zirckel, 121
Zodiacus, III. 1144
Zoll. Erkl. 119. Zeichen, 122
Zonæ frigidæ, III. 1443
temperatæ, III. ibid.
Zona torrida, III. ibid.
Zündloch im Stücke, II.
547
Zünd-Röhre in der Bom-
be, II. 570
Zusammendrücken, II. 878
Zusammenkunft, III. 1394
Zusätze Erklärung, 28.
Unterschied. 28. 29
Zwerchaxe, IV. 1698
Zwey mittlere Proportio-
nallinien. Wie sie zu
finden, IV. 1774
Zwillinge, III. 1142. 1190
Zwischen-Tiefe, 354. 396

Ende des Registers.

Bericht an den Buchbinder.

Die Kupffer müssen zu Ende einer jeden Disciplin dergestalt gebunden werden, daß man sie gantz heraus schlagen kan.

Nemlich im ersten Theile.

Pag. 256. Fig. *Geom. Tab. I.* bis *XXIV.*
300. *Trigon. Tab. I.* bis *IV.*
510. *Architect. Tab. I.* bis *XXX.*

Im andern Theile.

Pag. 592. Fig. *Artiller. Tab. I.* bis *VII.*
740. *Architect. mil. Tab. I.* bis *XIII.*
838. *Mechan. Tab. I.* bis *VI.*
872. *Hydrostat. Tab.*
906. *Aërometr. Tab.*
942. *Hydraul. Tab I* bis *III.*

Im dritten Theile.

Pag. 988. Fig. *Optic. Tab.*
1013. *Catoptr. Tab.*
1064. *Dioptr. Tab. I. II.*
1078. *Perspect. Tab I. II. III.*
1120. *Trig. Sphær. Tab.*
1426. *Astron. Tab. I.* bis *VIII.*
1464. *Geogr. Tab. I.*
1542. *Gnomon. Tab. I. II. III.*

Im vierten Theile.

Pag. 1934. Fig. *Algebr. Tab. I* bis *XI.*

Druckfehler.

Seite	Zeile	statt	lese man
1133	29	Sie	Die
1168	12	halbe 8 16	halbe 7 46
	14	ganze 16	ganze 15
1260	14	Cosmothero	Cosmotheoro.

Fig: 2.

Fig: 3

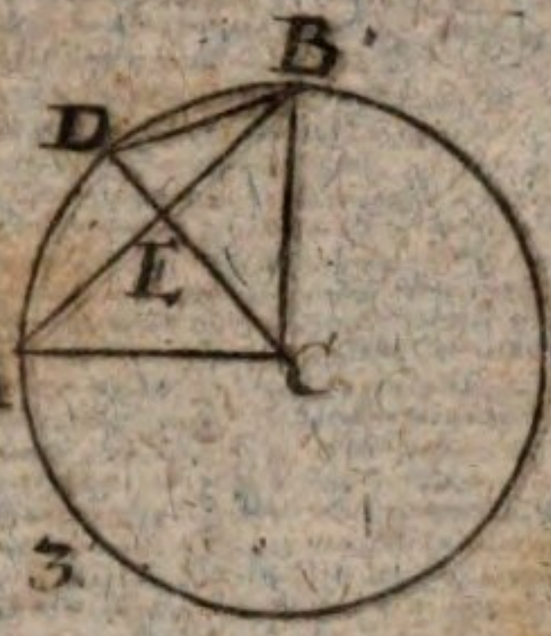


Fig: 4.

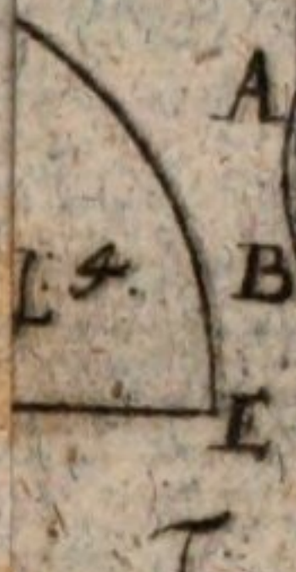


Fig: 5.

Fig: 6.

Fig: 7.

Fig: 8.

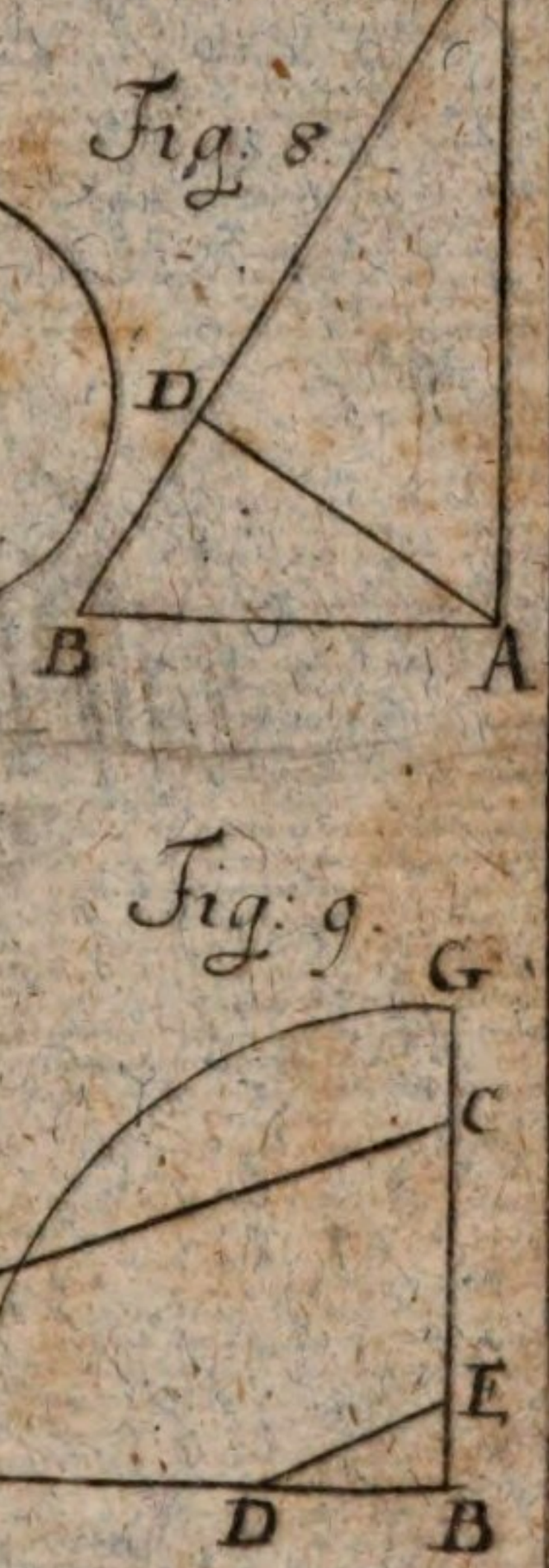


Fig: 9.

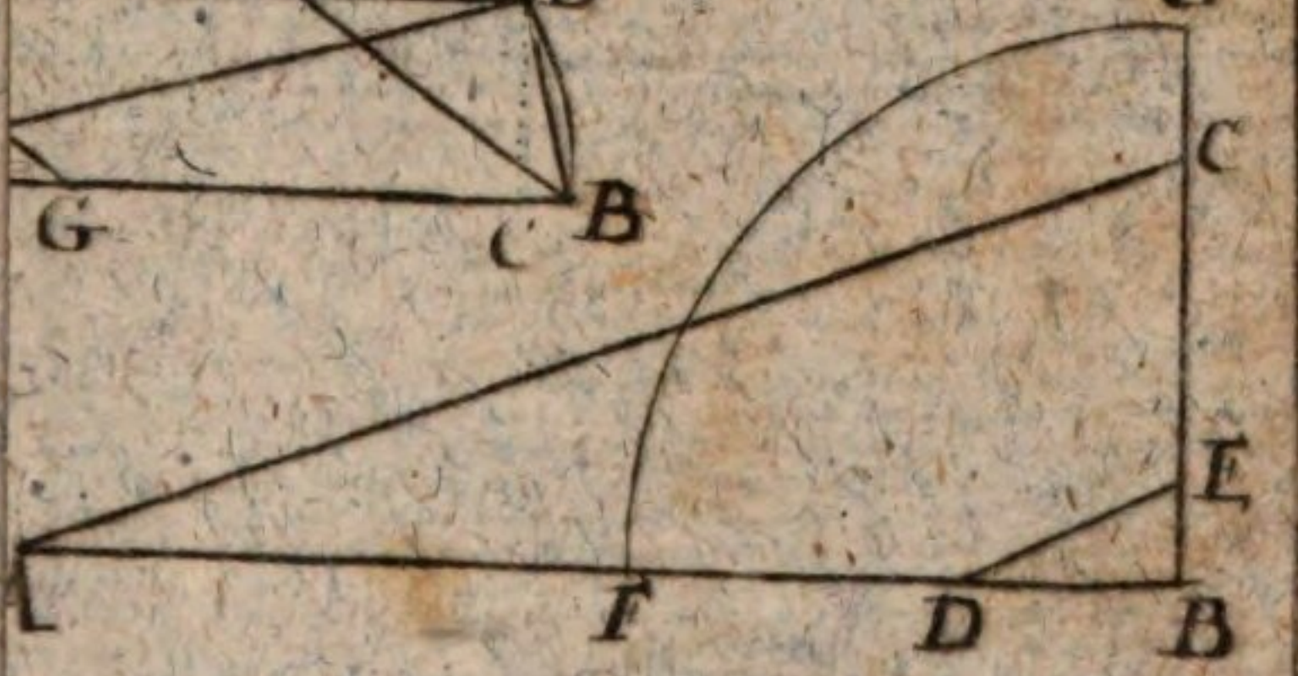
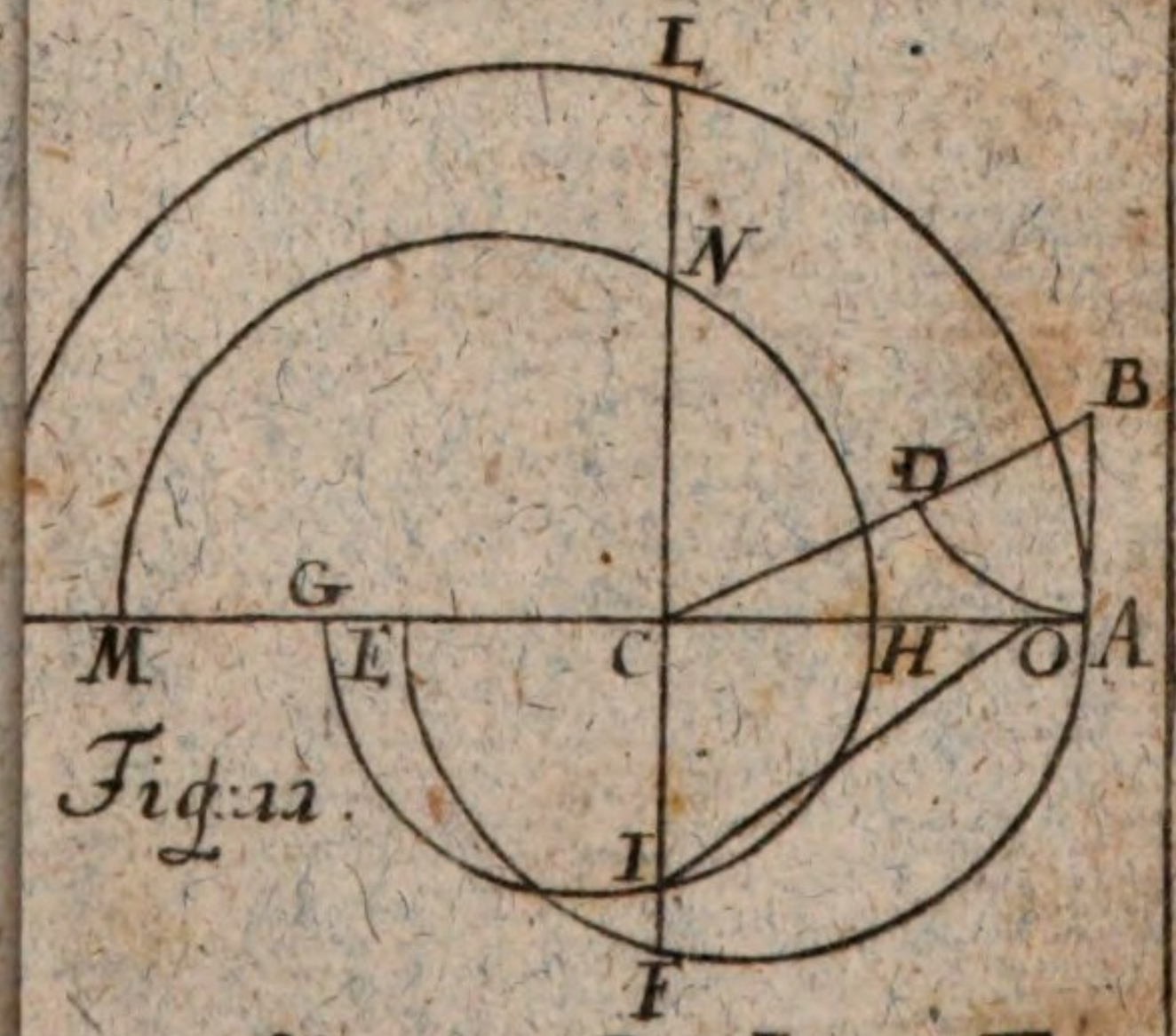


Fig: 11.



Figur: Algebr: Tab: I. Lit: P. 5.

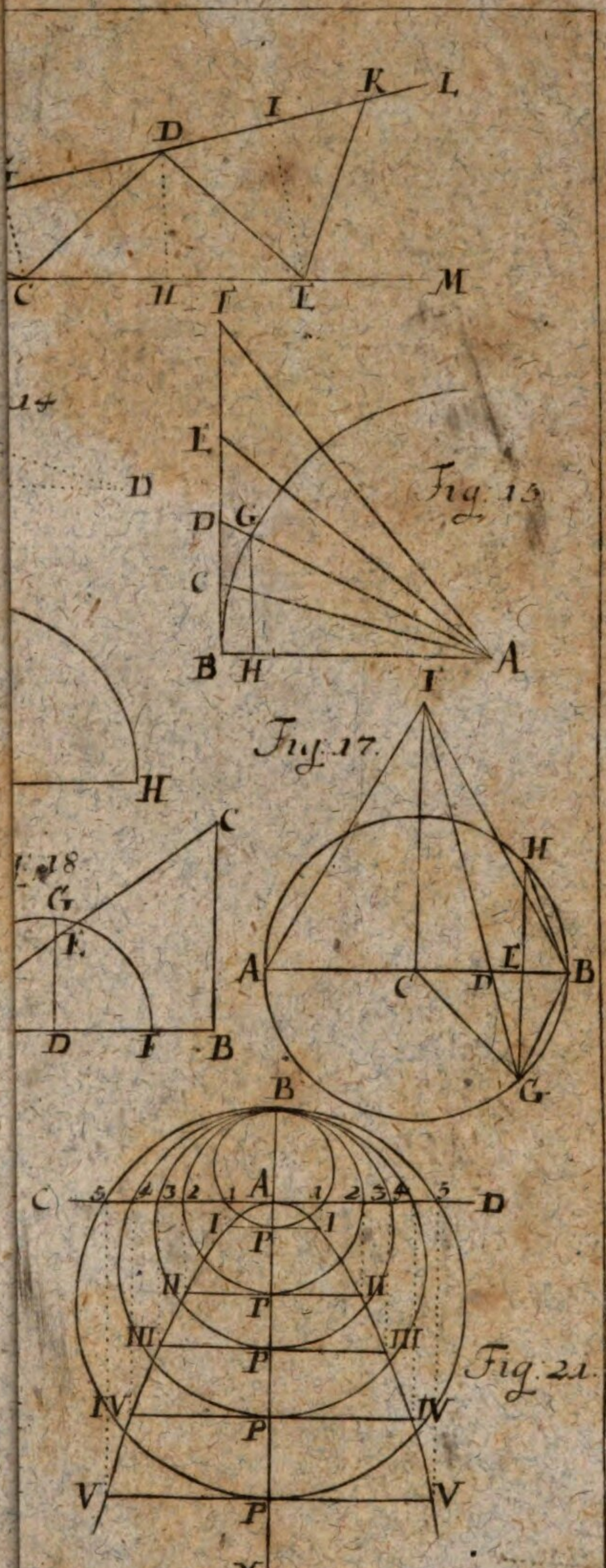


Fig. Algebr: Tab II. Lit Q 5.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wolff, Christian <<von>>,

Der Anfangs-Gründe aller Mathematischen Wissenschaften ... Theil

Bd.: 4

Halle im Magdeburgischen 1775

Math.u. 215-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594400-6
VD18 12561754-001